# ESPECTRO DE TAYLOR

## Un espectro conjunto para n-uplas conmutativas de operadores en espacios de Banach

Trabajo presentado para aspirar al título de Licenciado en Ciencias Matemáticas, Orientación Matemática Pura.

Autor: PABLO FUNES
Director: DR. ENRICO BOASSO

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Buenos Aires, Julio de 1994.

*A Pablo Morello*

# INTRODUCCION

El espectro de una matriz es el conjunto de sus autovalores. Puede encontrarse hallando las raíces complejas del polinomio característico lo cual, por supuesto, no siempre es fácil. El espectro no depende de bases, de modo que es en realidad un invariante de las transformaciones lineales. El desarrollo del álgebra lineal durante el siglo XIX llegó a la obtención de la forma de Jordan y la teoría de diagonalización. La noción de espectro, generalización del concepto de valor propio, permitió ampliar algunos de estos resultados a los espacios de dimensión infinita, dando lugar a la *Teoría Espectral de Operadores*, que ha tenido un desarrollo explosivo en nuestro siglo, con numerosas aplicaciones en otras ramas de la matemática y de la física.

Dada un álgebra de Banach conmutativa $\mathcal{A}$, se tiene que para cada $a \in \mathcal{A}$ el espectro $\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbf{C} : (a - \lambda)\mathcal{A} \neq \mathcal{A}\}$ es compacto y no vacío, y existe un cálculo funcional, es decir, un morfismo suryectivo $f \mapsto f(a)$ del álgebra de gérmenes de funciones analíticas en $\sigma(a)$ en $\mathcal{A}$. Cuando $\mathcal{A}$ no es conmutativa, caso de las álgebras $\mathcal{L}(X)$ de transformaciones lineales continuas de un espacio de Banach, puede trabajarse restringiéndose a una subálgebra conmutativa $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ maximal con la propiedad de que $a \in \mathcal{B}$. En la década de 1950, Calderón, Arens, Waelbroek y otros desarrollaron una teoría espectral (*joint spectrum)* para n-uplas de elementos $(a_1, \ldots, a_n)$ de un álgebra de Banach conmutativa $\mathcal{A}$, y el correspondiente cálculo funcional ([Arens], [A-C], [Waelbroeck]).

En 1970 Joseph Taylor estableció una noción de espectro conjunto, conocida hoy como *espectro de Taylor*, que abarca el caso de n-uplas conmutativas

$(a_1, \ldots, a_n)$ de un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ no necesariamente conmutativa y permite construir un cálculo funcional ([Taylor] y [Taylor2]). En los años subsiguientes esta teoría ha madurado, y se puede consultar por ejemplo el trabajo de Raúl Curto ([Curto]), que presenta un resumen de su estado actual.

En este trabajo presentamos detalladamente la noción de espectro conjunto de Taylor y sus propiedades básicas, para n-uplas conmutativas de operadores en espacios de Banach. Nos hemos basado principalmente en el trabajo original ([Taylor]).

Construimos en primer lugar el complejo de Koszul del que emana la definición tayloriana de espectro, y estudiamos su relación con los posibles espectros algebraicos. Continuamos con la teoría de funciones continuas y analíticas de $\mathbf{C}^n$ en complejos paramétricos finitos para llegar a demostrar la propiedad de proyección a partir de la aciclicidad del haz de funciones holomorfas (isomorfismo de Dolbeault). Pasamos luego a formular la versión ”Taylor” de la transformada de Gelfand, encontrando el subespacio del conjunto de caracteres de $\mathcal{A}$ con el cual está asociado el espectro de Taylor. Se presentan dos ejemplos ilustrando las técnicas de morfismos de álgebras y cocientes para encontrar el espectro y demostrando la imposibilidad de reducir el espectro de Taylor a una versión algebraica maximal, como ocurría en dimensión 1.

# 1 Espectro

Se llama *espacio de Banach* a un espacio vectorial real o complejo $X$, dotado de una norma $\|\|$, respecto de la cual es completo. Trabajaremos con espacios de Banach sobre el cuerpo **C** de los números complejos.

Dados dos espacios de Banach $X,Y$ se denomina $\mathcal{L}(X,Y)$ al conjunto de las aplicaciones lineales *(Operadores)* continuas de $X$ en $Y$. Cuando $X=Y$ se utiliza la notación $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(X,X)$.

Sea $a$ un operador, $a \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se define la norma de $a$,

$$\|a\| = \sup\{\| ax\| : \ x \in X, \|x\| = 1\}$$

Es un hecho conocido que una función lineal $a : X \to Y$ es continua si y sólo si $\|a\| < \infty$.

El conjunto de los operadores inversibles (no singulares) de un espacio de Banach X se define por

$$GL(X) = \{a \in \mathcal{L}(X) : \exists b \in \mathcal{L}(X), ab = ba = I\}$$

donde $I \in \mathcal{L}(X)$ es la identidad.

El espectro de $a \in \mathcal{L}(X)$ es el conjunto de los números $\lambda \in \mathbf{C}$ tales que $a - \lambda I$ no es inversible,

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbf{C} : a - \lambda I \notin GL(X)\}$$

Esta situación se generaliza en la teoría de álgebras de Banach. Un álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es un espacio de Banach dotado de un producto asociativo, continuo $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, no necesariamente conmutativo, con un elemento neutro $e$ y tal que para todo $a, b \in \mathcal{A}$,

$$\|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|$$

El conjunto de operadores continuos de un espacio de Banach resulta ser un álgebra de Banach respecto de la composición: $\mathcal{A} = \mathcal{L}(X)$, $e = I$.

Para $a \in \mathcal{A}$ tenemos el espectro

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbf{C} : a - \lambda \text{ no es inversible en } \mathcal{A}\}$$

Por comodidad se omite la $e$ ($I$ en el caso de operadores) y se escribe $a - \lambda$ en lugar de $a - \lambda e$ o $a - \lambda I$.

De la teoría de álgebras de Banach se conoce que el conjunto $G(\mathcal{A})$ de los elementos inversibles de $\mathcal{A}$ es abierto, y las propiedades elementales del espectro: Para cualquier $a \in \mathcal{A}$ el espectro es un compacto de $\mathbf{C}$, no vacío.

La teoría de Taylor que veremos en este trabajo amplía la noción de espectro a dimensiones mayores: En lugar de un operador fijo $a$ consideramos varios simultáneamente. Dada una n-upla $a_1, \ldots, a_n$ de operadores en un espacio de Banach $X$, $a_i \in \mathcal{L}(X)$, buscamos un conjunto $\sigma(a_1, \ldots, a_n) \subset \mathbf{C}^n$, un *espectro conjunto* para los $n$ operadores.

# 2 Espectro Conjunto

Para definir espectro se parte de la noción de singularidad: $a \in \mathcal{A}$ es singular si y sólo si no es inversible. El espectro de $a$ es

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbf{C} : \; a - \lambda \text{ es singular}\} \tag{1}$$

Cuando la dimensión es mayor que 1 no podemos hablar de inversibilidad; en cambio será necesaria una nueva definición de singularidad, que extienda al caso unidimensional donde ”singular” es equivalente a ”no inversible”.

La teoría de álgebras de Banach proporciona soluciones satisfactorias para el problema de definir el espectro conjunto de una n-upla cuando el álgebra $\mathcal{A}$ es conmutativa. Se define singularidad de este modo: Una n-upla $a = (a_1, \dots, a_n)$ es *no singular en sentido algebraico respecto de* $\mathcal{A}$ si y sólo si el ideal generado por $a$ es igual a $\mathcal{A}$; esto es, cuando existen $b_1, \dots b_n$ tales que

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = e$$

y se define el espectro de $a$ respecto de $\mathcal{A}$ como el conjunto

$$\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \{(\lambda_1, \dots \lambda_n) \in \mathbf{C}^n : (a_1 - \lambda_1, \dots, a_n - \lambda_n) \text{ es singular}\}$$

Esto sólo tiene sentido cuando $\mathcal{A}$ es conmutativa, en otro caso aparecerían un ”espectro” a derecha y otro a izquierda. Lamentablemente las álgebras de operadores continuos $\mathcal{L}(X)$, desde las matrices de $2\times 2$ en adelante, no son conmutativas. Es por eso que se intenta definir el espectro de otra manera.

Aquí abordaremos el problema para el caso en que los operadores $a_1, \dots, a_n$ conmutan entre sí:

$$a_i a_j = a_j a_i \quad \forall i, j$$

Si $\mathcal{A} = \mathcal{L}(X)$, $a$ es no singular si y sólo si comple con dos ecuaciones:

$$\begin{array}{lll} (1) & aX = X & \text{(a es suryectivo)} \\ (2) & \ker a = \{0\} & \text{(a es inyectivo)} \end{array}$$

Extenderemos la noción de singularidad a n-uplas de operadores (que conmutan entre sí) mediante una generalización de estas ecuaciones, utilizando el complejo de Koszul.

# 3 Subálgebras conmutativas

Sea $a = (a_1, \dots, a_n)$ una n-upla de operadores en un espacio de Banach X. Si conmutan entre sí, los podemos considerar como elementos de alguna subálgebra de $\mathcal{L}(X)$ que sea conmutativa. Existen varias subálgebras con esta propiedad; entre ellas podemos definir:

$$\begin{array}{ll} (a) & \text{El álgebra cerrada generada por } a_1, \dots, a_n \text{ en } \mathcal{L}(X) \\ (a)' & \text{El álgebra } \{b \in \mathcal{L}(X) : a_i b = b a_i \ 1 \leq i \leq n\} \\ (a)'' & \text{El álgebra } \{c \in \mathcal{L}(X) : bc = cb \ \forall b \in (a)'\} \end{array} \tag{2}$$

## 3.1 Propiedad

$(a)$, $(a)'$ y $(a)''$ son álgebras de Banach, $(a) \subset (a)'' \subset (a)'$ y tanto $(a)$ como $(a)''$ son conmutativas

DEM

1. El álgebra generada por $a_1, \dots, a_n$ es el conjunto $\mathbf{C}[a_1, \dots, a_n]$ de polinomios en $a_1, \dots, a_n$, que es obviamente un álgebra conmutativa. Al tomar clausura se obtiene $(a)$, que será igualmente conmutativa, pues $\lim p_i(a) q_i(a) = \lim p_i(a) \lim q_i(a)$.

2. Sea $S \subset \mathcal{A}$. El conjunto $S' = \{b \in \mathcal{A} : bs = sb \ \forall s \in S\}$ es un álgebra dado que la suma y producto de elementos de $S'$ conmutará con todo $s \in S$ y es

cerrada pues $(\lim b_i)s = s\lim b_i$. Luego, tanto $(a)'$ como $(a)''$ son álgebras de Banach.

3. Que $(a) \subset (a)'' \subset (a)'$ es obvio. $(a)''$ es conmutativa pues sus elementos conmutan con $(a)'$, y $(a)'' \subset (a)'\Box$

## 3.2 Observación

Sea $a = (a_1, \ldots, a_n)$ una n-upla conmutativa de elementos de un álgebra de Banach $\mathcal{B}$. Sea $\mathcal{A}$ una subálgebra conmutativa de $\mathcal{B}$ que los contiene. Entonces $(a) \subset \mathcal{A} \subset (a)'$, dado que $(a)$ es la intersección de todas las subálgebras que contienen a $a_1, \ldots, a_n$, y los elementos de $\mathcal{A}$ conmutan con todo $a_i$, luego están en $(a)'$.

Podríamos intentar aprovechar la definición de espectro que ya tenemos para álgebras conmutativas, fijando alguna de éstas. Aparecen dificultades muy pronto: Los espectros dependen del álgebra elegida, de manera que el espectro no es una propiedad intrínseca a la n-upla $a$ sino relativa al álgebra que se considere. Por la inclusión vista se tendrá

$$\sigma_{(a)}(a) \supset \sigma_{(a)''}(a) \supset \sigma_{(a)'}(a)$$

Estos tres conjuntos en general no coinciden. Si se desea comparar el espectro de la n-upla $a = (a_1, \ldots, a_n)$ con el de la n+1-upla $a' = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$ será necesario considerar las distintas subálgebras generadas por cada una y no se obtendrá la importante propiedad de proyección

$$\sigma(a) = \left\{(\lambda_1, \ldots \lambda_n) \in \mathbf{C}^n : \exists \lambda_{n+1}, (\lambda_1, \ldots \lambda_{n+1}) \in \sigma(a')\right\}$$

# 4 Algebra $E^n$

Sea $n$ un entero positivo. Sean $e, e_1, \cdots, e_n$ $n+1$ símbolos distintos. Para cada $p \in \{1, \ldots, n\}$, sea $E^n_p$ el espacio vectorial sobre $\mathbf{C}$ cuya base es el conjunto $\left\{e_{j_1}, \ldots e_{j_p} : 1 \leq j_1 < \ldots < j_p \leq n\right\}$. Para $p = 0$ se define $E^n_o$ de dimensión 1 con base el símbolo $e$. De este modo la dimensión de $E^n_p$ es $\binom{n}{p}$. Se define el *álgebra exterior de n elementos* sobre $\mathbf{C}$ como el espacio vectorial

$$E^n = E^n_o \oplus \cdots \oplus E^n_p$$

con la operación *producto exterior* $\wedge : E^n \times E^n \rightarrow E^n$ definida a partir de las relaciones

$$e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$$

$$e_i \wedge e_i = 0$$

$$e \wedge e_i = e_i \wedge e = e_i$$

El álgebra exterior $E^n$ así definida es un espacio vectorial de dimensión $2^n$ y un álgebra no conmutativa con elemento neuro $e$.

# 5 Complejos de Cadena

Un *complejo de cadena* (o simplemente *complejo*) es un par $(M, \delta)$, donde $M = \left\{M_p, p \in \mathbf{Z}\right\}$ es una sucesión de $\mathcal{R}$-módulos, $\mathcal{R}$ es un anillo fijo cualquiera y $\delta = \left\{\delta_p, p \in \mathbf{Z}\right\}$ una sucesión de morfismos de $\mathcal{R}$-módulos, $\delta_p : M_p \rightarrow M_{p+1}$

$$\cdots \longrightarrow M_{p+1} \xrightarrow{\delta_{p+1}} M_p \xrightarrow{\delta_p} M_{p-1} \longrightarrow \ldots$$

con la propiedad de que $\delta_p \circ \delta_{p+1}$ es el morfismo nulo para todo $p \in \mathbf{Z}$. $\delta$ es llamado el *operador de borde* o *diferencial* del complejo.

Los subgrupos imágenes y núcleos de la diferencial tienen nombres:

$$\begin{array}{ll} Z_p = \ker \delta_p & \textit{ciclos} \\ B_p = \operatorname{Im} \delta_{p+1} & \textit{bordes} \\ H_p = Z_p / B_p & \textit{homologías} \end{array}$$

El cociente $Z_p/B_p$ se puede hacer porque $Z_p \supseteq B_p$ en todos los casos ($\delta_p \circ \delta_{p+1} = 0$). Cuando $Z_p = B_p$ será porque $\operatorname{Im} \delta_{p+1} = \ker \delta_p$, o sea, cuando la sucesión $M_{p+1} \to M_p \to M_{p-1}$ sea exacta. En este caso el grupo de homología $H_p$ correspondiente es cero. Cuando todos los grupos de homología son cero, todos los ciclos son bordes y se dice que el complejo es *exacto*, o que su homología es trivial.

Sean $(M, \delta)$ y $(M', \delta')$ dos complejos de cadena sobre un anillo $\mathcal{R}$. Un *morfismo de complejos* es una sucesión $(f_p)$ de morfismos de $\mathcal{R}$-módulos, $f_p : M_p \to M'_p$ tales que $\delta'_p \circ f_p = f_{p+1} \circ \delta_p$ para todo $p \in \mathbf{Z}$. En esta situación los morfismos pasan a la homología, es decir, la aplicación cociente $f_{*p} : H_p \to H_{p-1}$ definida por

$$f_{*p}([\xi]) = [f_p(\xi)] \qquad \forall \xi \in M_p$$

(donde $[\xi]$ representa la clase de $\xi$ en $H_p$) está bien definida y es un morfismo de $\mathcal{R}$-módulos ([Lang],IV.2).

Si $(M'', \delta'')$ es un tercer complejo sobre $\mathcal{R}$, y $g_p : M'_p \to M''_p$ un morfismo de complejos, y para todo $p \in \mathbf{Z}$ se cumplen

$$\ker f_p = \{0\}$$
$$\operatorname{Im} f_p = \ker g_p$$
$$\operatorname{Im} g_p = M''_p$$

se dice que se tiene una sucesión exacta ”corta” de complejos

$$0 \longrightarrow M \overset{f}{\longrightarrow} M' \overset{g}{\longrightarrow} M'' \longrightarrow 0$$

Esta situación se puede resumir con el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & M_{p+1} & \overset{\delta_{p+1}}{\longrightarrow} & M_p & \overset{\delta_p}{\longrightarrow} & M_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & f_{p+1} \downarrow & & f_p \downarrow & & f_{p-1} \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & M'_{p+1} & \overset{\delta'_{p+1}}{\longrightarrow} & M'_p & \overset{\delta'_p}{\longrightarrow} & M'_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & g_{p+1} \downarrow & & g_p \downarrow & & g_{p-1} \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & M''_{p+1} & \overset{\delta''_{p+1}}{\longrightarrow} & M''_p & \overset{\delta''_p}{\longrightarrow} & M''_{p-1} & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

## 5.1 Lema

En esta situación existirá un morfismo de $\mathcal{R}$-módulos inducido en las homologías, $\delta_{*p} : H''_p \to H_{p-1}$ definido por

$$\delta_{*p}([\xi]) = \left[ f_{p-1}^{-1} \circ \delta_p \circ g_p^{-1}(\xi) \right]$$

Esto es, $\delta_{*p}([\xi]) = [\varphi]$ si y sólo si existe $\psi \in M'_p$ tal que $g_p(\psi) = \xi$ y $\delta_p(\psi) = f_{p-1}(\varphi)$. De esta manera, toda sucesión exacta "corta" de complejos induce una sucesión exacta "larga" entre las homologías:

$$\cdots \longrightarrow H_p \xrightarrow{f_{*p}} H'_p \xrightarrow{g_{*p}} H''_p \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1} \longrightarrow \cdots$$

([Lang], IV.2, teorema 1).

# 6 Complejo de Koszul $E^n(X,a)$

Sea $a = (a_1, \ldots, a_n)$ una n-upla de elementos del centro de un álgebra $\mathcal{A}$ sobre los números complejos, y sea $X$ un $\mathcal{A}$-módulo a izquierda. Nos interesa en particular el caso en que $X$ es un espacio de Banach y $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{L}(X)$ operadores que conmutan entre sí. En este caso $\mathcal{A}$ podría ser $(a)$ o $(a)''$; pero necesitaremos para esta parte de la teoría el caso más amplio en que $X$ es únicamente un $\mathcal{A}$-módulo, $\mathcal{A}$ una **C**-álgebra cualquiera.

Para cada subespacio $E^n_p$ del álgebra exterior $E^n$, sea $E^n_p(X)$ el espacio producto exterior complejo entre $X$ y $E^n_p$, $E^n_p(X) = X \otimes_{\mathbf{C}} E^n_p$. Esto significa que cada elemento de $E^n_p(X)$ se escribe de manera única como suma de elementos de la forma $x \otimes e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p}$. $E_p^n(X)$ es una suma directa de $\binom{n}{p}$ copias de $X$.

Definimos el complejo de Koszul $E(X,a)$ ordenando estos espacios de la siguiente manera:

$$0 \longrightarrow E_n^n(X) \xrightarrow{\delta_n} \cdots \longrightarrow E_p^n(X) \xrightarrow{\delta_p} \cdots \longrightarrow E_1^n(X) \xrightarrow{\delta_1} X \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

Con la diferencial $\delta$ definida por

$$\delta_p(x \otimes e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p}) = \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} a_{j_i} x \otimes e_{j_1} \wedge \ldots \widehat{e_{j_i}} \ldots \wedge e_{j_p} \qquad (4)$$

donde $\widehat{e_{j_i}}$ indica que ese elemento se omite.

Cada $\delta_p$ es un morfismo $E_p^n(X) \to E_{p-1}^n(X)$. La definición de $\delta$ no necesita que los índices $j_1, \ldots j_p$ se escriban en orden creciente; si se permutan los índices, los (-1) se acomodan por la propiedad del producto exterior, $e_j \wedge e_i = -e_i \wedge e_j$.

Puesto que $a_i a_j = a_j a_i$ para todo $i$, $j$, la composición $\delta_p \circ \delta_{p+1}$ es el morfismo nulo:

$$
\begin{aligned}
\delta_p\delta_{p-1}(x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_p}) &= \delta_p\left(\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}a_{j_i}x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\widehat{e_{j_i}}\ldots\wedge e_{j_{p+1}}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}a_{j_i}\delta_p(x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\widehat{e_{j_i}}\ldots\wedge e_{j_{p+1}})\\
&= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i-1}a_{j_i}\left(\sum_{k=1}^{i-1}(-1)^{k-1}a_{j_k}x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\widehat{e_{j_k}}\ldots\widehat{e_{j_i}}\ldots\wedge e_{j_{p+1}}\right.\\
&\qquad\left.+\sum_{k=i+1}^{p+1}(-1)^{k}a_{j_k}x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\widehat{e_{j_i}}\ldots\widehat{e_{j_k}}\ldots\wedge e_{j_{p+1}}\right)\\
&= \sum_{i=1}^{p+1}\sum_{k=1}^{i-1}(-1)^{i+k}(a_{j_i}a_{j_k}x-a_{j_k}a_{j_i}x)\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\widehat{e_{j_k}}\ldots\widehat{e_{j_i}}\ldots\wedge e_{j_{p+1}}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Se define $E_p^n(X)=\{0\}$ para todo $p>n$ o $p<0$.

Obtuvimos un complejo de cadena $E(X,a)$, denominado el *complejo de Koszul* para $a=(a_1,\ldots,a_n)$ sobre $X$.

Se usarán las siguientes notaciones:

$$
\begin{aligned}
E_p(X,a) &= E_p^n(X)\\
Z_p(X,a) &= \ker\delta_p\\
B_p(X,a) &= \operatorname{Im}\delta_{p+1}\\
H_p(X,a) &= Z_p(X,a)/B_p(X,a)
\end{aligned}
$$

Necesitaremos también una notación para escribir un elemento genérico del espacio $E_p^n(X)$. Sea $\mathcal{B}_p^n$ la base del subespacio $E_p^n$, o sea:

$$\mathcal{B}_p^n = \left\{ e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p}, \quad 1 \leq j_1 < \ldots < j_p \leq n \right\} \tag{5}$$

Entonces todo $\xi \in E_p^n(X)$ se escribe de manera única como

$$\xi = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{B}_p^n} x_\varepsilon \otimes \varepsilon \tag{6}$$

para algunos $x_\varepsilon \in X$.

Observemos la relación recursiva entre $\mathcal{B}_p^n$ y $\mathcal{B}_p^{n+1}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_p^{n+1} &= \left\{ e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p}, 1 \leq j_1 < \ldots < j_p \leq n+1 \right\} \\ &= \mathcal{B}_p^n \cup \left\{ e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{p-1}} \wedge e_{n+1}, 1 \leq j_1 < \ldots < j_{p-1} \leq n \right\} \\ &= \mathcal{B}_p^n \cup \left\{ \varepsilon \wedge e_{n+1}, \varepsilon \in \mathcal{B}_{p-1}^n \right\} \end{aligned} \tag{7}$$

donde $\varepsilon \wedge e_{n+1} = e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{p-1}} \wedge e_{n+1}$, si $\varepsilon = e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{p-1}}$.

En el caso en que $X$ es un espacio de Banach y $a$ una n-upla de operadores, $E_p^n(X)$ es una suma directa finita de espacios de Banach y tiene por lo tanto una estructura de espacio de Banach inducida por la de sus componentes, definiendo por ejemplo la norma como el máximo de las normas:

$$\left\| \sum_{\varepsilon \in \mathcal{B}_p^n} x_\varepsilon \otimes \varepsilon \right\| = \max_{\varepsilon \in \mathcal{B}_p^n} \|x_\varepsilon\|$$

Los morfismos diferenciales $\delta_p$ serán en este caso operadores lineales acotados entre los espacios de Banach $E_p^n(X)$ y $E_{p-1}^n(X)$. La linealidad de $\delta_p$ es obvia puesto que se definió sobre cada coordenada de $E_p^n(X)$ como una combinación lineal de los operadores $a_i$. Para ver la continuidad bastará ver que lo es en cada coordenada:

$$\begin{aligned}
\left\|\delta_p(x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_p})\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}a_{j_i}x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\widehat{e_{j_i}}\ldots\wedge e_{j_p}\right\| \\
&= \max_{1\le i\le n}\|a_i x\| \\
&\le \left(\max_{1\le i\le n}\|a_i\|\right)\|x\|
\end{aligned}$$

Tomando un elemento genérico de $E_p^n(X)$, $\xi=\sum x_\varepsilon\otimes\varepsilon$,

$$\left\|\delta_p(\xi)\right\| = \left\|\sum\delta_p(x_\varepsilon\otimes\varepsilon)\right\| \le \binom{n}{p}\left(\max_{1\le i\le n}\|a_i\|\right)\|x\|$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\left\|\delta_p\right\| &\le \tbinom{n}{p}\left(\max_{1\le i\le n}\|a_i\|\right)\|x\| \\
\left\|\delta_p\right\| &\le n!\left(\max_{1\le i\le n}\|a_i\|\right)\|x\| \qquad \text{(para todo } p\le n)
\end{aligned}$$

# 7 Espectro de Taylor

A lo largo de esta sección, $\mathcal{A}$ será una $\mathbf{C}$-álgebra, $X$ un $\mathcal{A}$-módulo y $a=(a_1,\ldots,a_n)$ una n-upla de elementos del centro de $\mathcal{A}$.

El complejo de Koszul que acabamos de construir es la herramienta algebraica que permite extender la definición de no singularidad: El complejo $E(X,a)$ puede ser exacto o no. Diremos que la n-upla $a$ es *no singular respecto de $X$ en el sentido de Taylor*, o simplemente *no singular,* cuando $E(X,a)$ sea exacto. En particular, si $n = 1$ se tiene

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{a} X \longrightarrow 0$$

Este complejo es exacto si y sólo si

$$\begin{aligned} \ker a &= \{0\} \\ \operatorname{Im} a &= X \end{aligned}$$

Está claro que coincide con la definición de no singularidad para el caso unidimensional. En el caso $n = 2$, el complejo es

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\delta_2} X \oplus X \xrightarrow{\delta_1} X \longrightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \delta_2(x) &= \delta_2(x \otimes e_1 \wedge e_2) = a_1 x \otimes e_2 - a_2 x \otimes e_1 = (-a_2 x, a_1 x) \\ \delta_1(x,y) &= \delta_1(x \otimes e_1 + y \otimes e_2) = a_1 x + a_2 y \end{aligned}$$

Este complejo es exacto si y sólo si

$$\begin{aligned} &\ker a_1 \cap \ker a_2 = \{0\} && (\ker \delta_2 = \{0\}) \\ &a_1 x = a_2 y \Rightarrow \exists z : x = a_2 z,\ y = a_1 z && (\operatorname{Im} \delta_2 = \ker \delta_1) \\ &\operatorname{Im} a_1 + \operatorname{Im} a_2 = X && (\operatorname{Im} \delta_1 = X) \end{aligned}$$

Se define el *Espectro de Taylor* de $a = (a_1, \ldots, a_n)$

$$\sigma(a) = \sigma(a, X) = \{\lambda \in \mathbf{C}^n : E(X, a - \lambda) \text{ no es exacto}\} \tag{8}$$

Observamos que en el caso $n = 1$, el espectro de Taylor coincide con el espectro conocido para operadores de un espacio de Banach: El complejo de Koszul asociado a $a - \lambda$ es exacto si y sólo si $a - \lambda$ es inversible.

## 7.1 Lema

Sea $a = (a_1, \dots, a_n)$ una n-upla de elementos del centro de un álgebra $\mathcal{A}$, $X$ un $\mathcal{A}$-módulo a izquierda y $E(X, a)$ el complejo de Koszul asociado. Por pertenecer $a_1, \dots, a_n$ al centro podemos considerar el ideal bilátero $I = \langle a_1, \dots a_n \rangle$ generado por $a$. Sea $c$ un elemento de $I$. Entonces $c$ es la aplicación nula en la homología $H_p(X, A)$ para todo $p$; esto es, $c\xi \in \operatorname{Im} \delta_{p+1}$ para todo $\xi \in \ker \delta_p$.

DEM

Sean $b_1, \dots, b_n \in \mathcal{A}$ tales que $c = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$. Sobre los elementos de $E_p$ de la forma $x \otimes e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p}$ definimos el morfismo $h_p : E_p^n(X) \to E_{p+1}^n(X)$ por

$$h_p(x \otimes e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p}) = \sum_{i=1}^{n} b_i x \otimes e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p} \wedge e_i$$

$h_p$ así definido opera en sentido inverso al diferencial $\delta_p$.

$$\cdots \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{}} E_{p+1}^n(X) \underset{\underset{h_p}{\longleftarrow}}{\overset{\delta_{p+1}}{\longrightarrow}} E_p^n(X) \underset{\underset{h_{p-1}}{\longleftarrow}}{\overset{\delta_p}{\longrightarrow}} E_{p-1}^n(X) \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{}} \cdots$$

Al componer $\delta$ y $h$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\delta_{p+1}h_p(x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_p}) &= \sum_{i=1}^{p}\Big(a_ib_ix\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_p} \\
&\quad - \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}a_{j_k}b_ix\otimes e_i\wedge e_{j_1}\wedge\ldots\widehat{e_{j_k}}\ldots\wedge e_{j_p}\Big) \\
h_{p-1}\delta_p(x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_p}) &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}a_{j_k}b_ix\otimes e_i\wedge e_{j_1}\wedge\ldots\widehat{e_{j_k}}\ldots\wedge e_{j_p}
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$(\delta\circ h-h\circ\delta)(x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_p})=\sum a_ib_ix\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_p}=cx\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_p}$$

luego

$$(\delta\circ h-h\circ\delta)(\xi)=c\xi \qquad \text{Para todo } \xi\in E_p^n(X)$$

Esto quiere decir que si $\xi\in\ker\delta_p$ entonces $c\xi=\delta_{p+1}(h_p(\xi))\in\operatorname{Im}\delta_{p+1}$. Esto significa que $c$ manda ciclos en bordes o, lo que es lo mismo, es el operador cero sobre $H_p(X,a)\square$

## 7.2 Corolario

Si $a=a_1,\ldots,a_n$ es una n-upla de elementos del centro de $\mathcal{A}$, no singular en sentido algebraico respecto de $\mathcal{A}$, y $X$ es un $\mathcal{A}$-módulo a izquierda, $a$ será no singular en el sentido de Taylor respecto de $X$.

DEM

Aplicando el lema anterior para $c=I$ resulta que si $a_1b_1+\cdots+a_nb_n=I$, entonces $I$ está en el ideal $I$ generado por $(a_1,\ldots,a_n)$ sobre $\mathcal{A}$; entonces el operador $I$ sobre la homología es cero, pero como $I$ induce la identidad en $H_p(X,a-\lambda)$, éste resulta igual a cero.

## 7.3 Corolario

Si $X$ es un espacio de Banach y $a$ una n-upla de operadores que conmutan entre sí, el espectro de Taylor $\sigma(a)$ está contenido en el espectro algebraico $\sigma_{\mathcal{A}}(a)$ para cualquier subálgebra conmutativa $a \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X)$:

$$\sigma(a) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(a) \tag{9}$$

DEM

Es consecuencia inmediata del lema anterior.

## 7.4 Lema

Sea

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de $\mathcal{A}$-módulos. Esta sucesión induce una sucesión exacta corta entre complejos de Koszul

$$0 \longrightarrow E(X,a) \longrightarrow E(Y,a) \longrightarrow E(Z,a) \longrightarrow 0$$

Y por lo tanto (Lema 5.1)una sucesión exacta larga entre las homologías

$$\cdots \longrightarrow H_p(X,a) \xrightarrow{f_{*p}} H_p(Y,a) \xrightarrow{g_{*p}} H_p(Z,a) \xrightarrow{\delta_{*p}} H_{p-1}(X,a) \longrightarrow \cdots$$

DEM

Se define el morfismo $f_p : E^n_p(X,a) \to E^n_p(Y,a)$ por

$$f_p(x \otimes e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p}) = f(x) \otimes e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p}$$

o sea,

$$f\left(\sum_{\varepsilon \in \mathcal{B}^n_p} x_\varepsilon \otimes \varepsilon\right) = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{B}^n_p} f(x_\varepsilon) \otimes \varepsilon$$

y de igual manera el morfismo $g_p$. Entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow E^n_p(X) \xrightarrow{f_p} E^n_p(Y) \xrightarrow{g_p} E^n_p(Z) \longrightarrow 0$$

es exacta para cada $p$, al serlo en cada una de las $\binom{n}{p}$ copias de $X$ o $Y$ que forman $E^n_p(X)$ o $E^n_p(Y)$.

Para que $f_p$, $g_p$ así definidos sean morfismos de complejos debemos ver que conmutan con las diferenciales. Haremos la cuenta para $f$. Lo que hay que demostrar es la conmutatividad de

$$\begin{array}{ccc} E^n_p(X) & \xrightarrow{\delta_p} & E^n_{p-1}(X) \\ f_p \downarrow & & f_{p-1} \downarrow \\ E^n_p(Y) & \xrightarrow{\delta'_p} & E^n_{p-1}(Y) \end{array}$$

$$\begin{aligned}\delta'_p(f_p(x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_p})) &= \delta'_p(f(x)\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_p})\\ &= \sum(-1)^{i-1}a_{j_i}f(x)_{j_1}\wedge\ldots\widehat{e_{j_i}}\ldots\wedge e_{j_p}\end{aligned}$$

$$f_{p-1}(\delta_p(x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_p})) = \sum(-1)^{i-1}f(a_{j_i}x)e_{j_1}\wedge\ldots\widehat{e_{j_i}}\ldots\wedge e_{j_p}$$

son iguales porque $a_{j_i}f(x) = f(a_{j_i}x)$ ($f$ es un morfismo de $\mathcal{A}$-módulos).

Ha resultado que

$$0 \longrightarrow E(X,a) \xrightarrow{f} E(Y,a) \xrightarrow{g} E(Z,a) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos. Por el lema 5.1 ésta genera la sucesión exacta "larga" buscada$\square$

## 7.5 Corolario

En las condiciones del lema 7.4, Si $a$ es no singular en dos cualesquiera de los espacios $X$, $Y$, $Z$ también lo será en el tercero. Por lo tanto el espectro de $a$ sobre uno de los espacios está contenido en la unión de los espectros sobre los otros dos.

DEM

Si $a$ es no singular por ejemplo en $X$ e $Y$ es porque las homologías $H_p(X,a)$ y $H_p(Y,a)$ son cero; luego la sucesión exacta larga es

$$\cdots \longrightarrow H_{p+1}(Z,a) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow H_p(Z,a) \longrightarrow \cdots$$

resutando $H_p(X,a) = 0$ para todo $p$□

# 8 Espectros de $(a_1, \ldots, a_n)$ y $(a_1, \ldots, a_{n+1})$

Consideraremos ahora un álgebra compleja $\mathcal{A}$, un $\mathcal{A}$-módulo a izquierda X, y dos n-uplas $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}^n$ y $a' = (a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathcal{A}^{n+1}$. El espectro de la primera es un subconjunto de $\mathbf{C}^n$ y el de la segunda lo es de $\mathbf{C}^{n+1}$. Estudiaremos la relación que hay entre ambos.

## 8.1 Sucesión exacta $E(X,a) \to E(X,a') \to E_{-1}(X,a)$

Para cada $p \in \mathbf{Z}$ definimos morfismos de $\mathcal{A}$-módulos $\mu_p$ y $\nu_p$:

$$0 \longrightarrow E_p(X,a) \xrightarrow{\mu_p} E_p(X,a') \xrightarrow{\nu_p} E_{p-1}(X,a) \longrightarrow 0$$

$\mu_p$ es la inclusión obvia

$$\mu_p(x \otimes e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p}) = x \otimes e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p}$$

y $\nu_p$ se define por

$$\nu_p(x \otimes e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p}) = \begin{cases} x \otimes e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p} & \text{si } j_p = n+1 \\ 0 & \text{si } j_p \neq n+1 \end{cases}$$

Es claro que para cada $p$ esta es una sucesión exacta de $\mathcal{A}$-módulos. Lo que deseamos tener es una sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow E(X,a) \xrightarrow{\mu} E(X,a') \xrightarrow{\nu} E_{-1}(X,a) \longrightarrow 0$$

donde con $E_{-1}(X,a)$ nos referimos al mismo complejo $E(X,a)$ pero desplazado un lugar hacia la derecha, es decir, con los índices disminuidos en 1. El diagrama conmutativo es

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & E_{p+1}(X,a) \arrow[r, "\delta_{p+1}"] \arrow[d, "\mu_{p+1}"'] & E_p(X,a) \arrow[r, "\delta_p"] \arrow[d, "\mu_p"'] & E_{p-1}(X,a) \arrow[r] \arrow[d, "\mu_{p-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & E_{p+1}(X,a') \arrow[r, "\delta'_{p+1}"] \arrow[d, "\nu_{p+1}"'] & E_p(X,a') \arrow[r, "\delta'_p"] \arrow[d, "\nu_p"'] & E_{p-1}(X,a') \arrow[r] \arrow[d, "\nu_{p-1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & E_p(X,a) \arrow[r, "\delta_p"] \arrow[d] & E_{p-1}(X,a) \arrow[r, "\delta_{p-1}"] \arrow[d] & E_{p-2}(X,a) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd} \tag{10}$$

Debemos demostrar que $\mu_p$ y $\nu_p$ conmutan con las diferenciales. Para $\mu_p$ es obvio dado que $a_{n+1}$ no interviene en ningún momento. Hagamos la cuenta para

$\nu_p$.

$$\nu_{p-1}\delta'_p(x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_p})=\nu_{p-1}\left(\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}a_{j_i}x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\widehat{e_{j_i}}\ldots\wedge e_{j_p}\right)$$

Esto es cero si $j_p\neq n+1$, coincidiendo con $\delta_{p-1}\nu_p(x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_p})=\delta_{p-1}(0)=0$. Si $j_p=n+1$,

$$\begin{aligned}\nu_{p-1}\delta'_p(x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_p}) &= \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i-1}a_{j_i}x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\widehat{e_{j_i}}\ldots\wedge e_{j_{p-1}}\\ &= \delta_{p-1}(x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_{p-1}})\\ &= \delta_{p-1}\nu_p(x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_p})\end{aligned}$$

Se puede pasar, de acuerdo al lema 5.1, a la homología, para obtener la sucesión exacta larga

$$\cdots\longrightarrow H_p(X,a)\xrightarrow{\mu_{*p}}H_p(X,a')\xrightarrow{\nu_{*p}}H_{p-1}(X,a)\xrightarrow{\delta_{*p}}\cdots \tag{11}$$

## 8.2 Observación

En la construcción anterior el morfismo $\delta_{*p}$ puede interpretarse como la acción de $a_{n+1}$ restringida a la homología $H_{p-1}(X,a)$:

$$\delta_{*p}[\xi]=[a_{n+1}\xi]$$

DEM

Sea $\xi\in Z_{p-1}(X,a)$. Notaremos con $[\xi]$ su clase en la homología $H_{p-1}(X,a)$. De acuerdo al lema 5.1 será $\delta_{*p}([\xi])=[\varphi]$, donde existe alguna $\psi\in E_p(X,a')$ tal que $\nu_p(\psi) = \xi$, $\delta'_p(\psi) = \mu(\varphi)$. Podemos escribir $\xi = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{B}^n_{p-1}} x_\varepsilon \otimes \varepsilon$, para algunos $x_\varepsilon \in X$. Tomando $\varphi = a_{n+1}\xi$ obtenemos, dado que $\mu$ es una inclusión, $\mu_{p-1}(\varphi) = a_{n+1}\xi$.

Sea $\psi = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{B}^n_{p-1}} x_\varepsilon \otimes \varepsilon \wedge e_{n+1}$. Entonces

$$\nu_p(\psi) = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{B}^n_{p-1}} x_\varepsilon \otimes \varepsilon = \xi$$

y

$$\begin{aligned} \delta'_p(\psi) &= \sum_{\varepsilon \in \mathcal{B}^n_{p-1}} (-1)^{p-1} a_{n+1} x_\varepsilon \otimes \varepsilon \quad + \quad \ldots \quad \text{(elementos con } e_{n+1}\text{)} \\ &= a_{n+1}\xi + \eta \end{aligned}$$

Pero $\nu_{p-1}(\delta'_p(\psi)) = \delta_{p-1}(\nu_p(\psi)) = \delta_{p-1}(\xi) = 0$ pues $\xi$ es un ciclo. Por lo tanto $\delta'_p(\psi) \in \operatorname{Im} \mu_{p-1}$. Ningún elemento de la imagen de $\mu$ puede tener componentes con $e_{n+1}$, de modo que el $\eta$ que apareció arriba es cero y confirmamos

$$\delta'_p(\psi) = \mu(a_{n+1}\xi) \square$$

## 8.3 Corolario

Si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ es no singular, también lo será $a' = (a_1, \ldots, a_{n+1})$. Por ejemplo, $(I, a_2, \ldots, a_n)$ es no singular para $a_2, \ldots, a_n$ cualesquiera.

Se deduce que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1} \in \sigma(a')$ entonces $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \sigma(a)$. Dicho de otra manera,

$$\pi(\sigma(a_1,\dots,a_{n+1})) \subset \sigma(a_1,\dots,a_n) \tag{12}$$

donde $\pi$ es la proyección de $\mathbf{C}^{n+1}$ en $\mathbf{C}^n$, $\pi(z_1,\dots,z_{n+1}) = (z_1,\dots,z_n)$. En 14.4 vemos que esta contención es de hecho una igualdad.

DEM

$(a_1,\dots,a_n)$ es no singular si y sólo si $H_p(X,a) = 0$ para todo $p$. Reemplazando en (11) se obtiene

$$0 \longrightarrow H_p(X,a') \longrightarrow 0$$

exacta para cada $p$, y por consiguiente $H_p(X,a') = 0$ para cada $p$.

## 8.4 Criterio de no singularidad

Sean $a$, $\mathcal{A}$ y $X$ como en el lema 7.1. Llamemos $X_p = a_1X + \cdots + a_pX$. Si $X_n = X$ y $a_p : X/X_p \to X$ tiene núcleo cero para todo $p$ (si $\ker a_p \subset X_p$), entonces $a$ es no singular en X.

DEM

Lo haremos por inducción en $n$. Si $n = 1$ el complejo de Koszul es

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\delta_1} X \longrightarrow 0$$
$$\delta_1(x) = a_1x$$

$X_1 = a_1X = X$. Además $a_1 : X/\{0\} \to X$ tiene núcleo cero; luego $a_1 = \delta_1$ es biyectiva y por lo tanto no singular.

Supongamos que se ha demostrado para $n$. Sea $a' = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$, $a = (a_1, \ldots, a_n)$. El hecho de que los $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ conmuten con todos los elementos de $\mathcal{A}$ nos permite considerar a cualquiera de los $X_p$ como un $\mathcal{A}$-módulo en sí mismo.

La n-upla $a_1, \ldots, a_n$ cumple con las hipótesis de este lema si nos restringimos al espacio $X_n = a_1X + \cdots + a_nX$. La hipótesis inductiva indica que $a$ es no singular en $X_n$.

Por el corolario 8.3, $a'$ también es no singular en $X_n$ o lo que es lo mismo, $H_p(X, a') = 0$ para todo $p$.

Consideramos ahora la sucesión exacta de $\mathcal{A}$-módulos obtenida al hacer el cociente de $X = X_n + a_{n+1}X$ por $X_n$,

$$0 \longrightarrow X_n \longrightarrow X \longrightarrow X/X_n \longrightarrow 0$$

Obtenemos de acuerdo al lema 7.4 una sucesión exacta larga de homologías

$$\cdots \longrightarrow H_p(X_n, a') \longrightarrow H_p(X, a') \longrightarrow H_p(X/X_n, a') \longrightarrow \cdots$$

Ya vimos que $H_p(X_n, a')$ es cero. Veamos que $H_p(X/X_n, a')$ también es cero, con lo cual quedará demostrado el teorema. La diferencial $\delta_p : E_p(X/X_n, a') \to E_{p-1}(X/X_n, a')$ es

$$\delta_p([x] \otimes e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p}) = \begin{cases} [0] & \text{si } j_p \neq n+1 \\ (-1)^{p-1}[a_{n+1}x] \otimes e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{p-1}} & \text{si } j_p = n+1 \end{cases}$$

(donde $[x]$ es la clase de equivalencia de $x$ en $X/X_n$). Esto se debe a que $a_iX \in X_n$. Por lo tanto los elementos de $Z_p(X/X_n, a') = \ker \delta_p$ son suma de cosas de la forma

$[x]\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_p}$ con $j_p\neq n+1$.

Por otro lado, $[x]=a_1[x_1]+\cdots+a_{n+1}[x_{n+1}]$ para algunos $x_1,\ldots,x_{n+1}$ (porque $X_{n+1}=X$). Pero $a_1x_1+\cdots+a_{nn}x_n\in X_n$ y por lo tanto $[x]=a_{n+1}[x]$. Entonces $[x]\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_p}=\delta_{p+1}([x_{n+1}])$ y por lo tanto, $\ker\delta_p=\operatorname{Im}\delta_{p+1}$, $H_p(X/X_n,a')=\{0\}$ □

# 9 Complejos de cadena paramétricos

## 9.1 Lema

Sea $X$ un espacio de Banach, y $a=(a_1,\ldots,a_n)$ una n-upla de operadores que conmutan entre sí. Para cada n-upla de números complejos $\lambda\in\mathbf{C}^n$ sea $E(X,a-\lambda)$ el complejo de Koszul asociado, y sea $\delta(\lambda)=\left\{\delta_p(\lambda)\right\}$ su diferencial. Recordemos que $\delta_p(\lambda):E_p^n(X)\to E_{p-1}^n(X)$ es un operador lineal acotado para cada $p\in\mathbf{Z}$. Podemos decir que la aplicación $\lambda\mapsto\delta(\lambda)$ es continua en el sentido siguiente: Para todo $\varepsilon>0$, $\lambda\in\mathbf{C}^n$, existe un $\alpha>0$ tal que

$$\left\|\delta_p(\lambda)-\delta_p(\lambda')\right\|<\varepsilon$$

para todo $\|\lambda-\lambda'\|<\alpha$ y todo $p\in Z$.

DEM

Para $p>n$ o $p<0$ la diferencial $\delta_p(\lambda)$ es la aplicación cero y no hay nada que demostrar. Para $0\leq p\leq n$, de la identidad (4) resulta

$$\delta_p(\lambda)x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\wedge e_{j_p}=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}(a_{j_i}-\lambda_{j_i})x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\widehat{e_{j_i}}\ldots\wedge e_{j_p}$$

Al restar $\delta(\lambda')$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
&\left\| \left(\delta_p(\lambda) - \delta_p(\lambda')\right) x \otimes e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p} \right\| \\
&\qquad\qquad = \left\| \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} (\lambda'_{j_i} - \lambda_{j_i}) x \otimes e_{j_1} \wedge \ldots \widehat{e_{j_i}} \ldots \wedge e_{j_p} \right\| \\
&\qquad\qquad \leq \|x\| \sum_{i=1}^{p} \left| \lambda'_{j_i} - \lambda_{j_i} \right| \\
&\qquad\qquad \leq p \max_{i=1}^{n} \left| \lambda'_{j_i} - \lambda_{j_i} \right| \ \|x\| \\
&\qquad\qquad \leq n \|\lambda - \lambda'\| \ \|x\|
\end{aligned}
$$

Sea $\xi \in E_p(X,a)$, $\xi = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{B}_p^n} x_\varepsilon \otimes \varepsilon$,

$$
\begin{aligned}
\left\| (\delta_p(\lambda) - \delta_p(\lambda'))\, \xi \right\| &\leq \sum_{\varepsilon \in \mathcal{B}_p^n} \left\| (\delta_p(\lambda) - \delta_p(\lambda'))\, x_\varepsilon \otimes \varepsilon \right\| \\
&\leq \binom{n}{p} n \|\lambda - \lambda'\| \ \|x\| \\
&\leq n \cdot n! \, \|\lambda - \lambda'\| \ \|x\|
\end{aligned}
$$

Resultando

$$
\left\| \delta_p(\lambda) - \delta_p(\lambda') \right\| \leq n \cdot n! \left\| \lambda - \lambda' \right\| \square
$$

## 9.2 Definición

Generalizando lo observado en el lema anterior, se define *complejo de cadena paramétrico de espacios de Banach* de la siguiente manera: Sea $Y = \left\{ Y_p, p \in \mathbf{Z} \right\}$ una sucesión de espacios de Banach. Notaremos con $\mathcal{D}(Y)$ al conjunto de las sucesiones de funciones $\delta = \left\{ \delta_p, p \in \mathbf{Z} \right\}$ tales que $(Y, \delta)$ es un complejo de cadena; es decir, tales que $\delta_p \in \mathcal{L}(Y_p, Y_{p-1})$, $\delta_{p-1} \circ \delta_p = 0$.

Sea $\Lambda$ un espacio topológico cualquiera. Un complejo de cadena paramétrico es una aplicación $\delta : \Lambda \to \mathcal{D}(Y)$, $\delta(\lambda) = \left\{\delta_p(\lambda), p \in \mathbf{Z}\right\}$ tal que cada aplicación $\delta_p : \Lambda \to \mathcal{L}(Y_p, Y_{p-1})$ es continua.

En el caso en que $Y_p = 0$ excepto para finitos $p \in \mathbf{Z}$ diremos que $\delta : \Lambda \to \mathcal{D}(Y)$ es un complejo de cadena paramétrico finito.

### 9.3 Observación

Si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ es una n-upla de operadores continuos sobre un espacio de Banach $X$ entonces la aplicación $\delta$ que definimos en el lema anterior es un complejo de cadena paramétrico finito de $\mathbf{C}^n$ en la sucesión de espacios $E^n(X) = \left\{E^n_p(X), p \in \mathbf{Z}\right\}$ .

## 10 Complejo $C(\Lambda, Y, \delta)$

Sea $\Lambda$ un espacio topológico, $Y = \left\{Y_p, p \in \mathbf{Z}\right\}$ una sucesión de espacios de Banach y $\delta : \Lambda \to \mathcal{D}(Y)$ un complejo de cadena paramétrico finito.

Notemos con $C(\Lambda, Y_p)$ al $\mathbf{C}$-espacio vectorial de las funciones continuas de $\Lambda$ en $Y_p$. Sea $C(\Lambda, Y) = \left\{C(\Lambda, Y_p), p \in \mathbf{Z}\right\}$. Definimos el complejo de cadena paramétrico $C(\Lambda, Y, \delta) = (C(\Lambda, Y), \tilde{\delta})$, cuya diferencial $\tilde{\delta} = \left\{\tilde{\delta}_p : C(\Lambda, Y_p) \to C(\Lambda, Y_{p-1}), p \in \mathbf{Z}\right\}$ está definida por

$$\tilde{\delta}_p f(\lambda) = \delta_p(\lambda) f(\lambda)$$

para $\lambda \in \lambda$ y $f \in C(\Lambda, Y_p)$. Es claro que $\tilde{\delta}$ así definida es una aplicación lineal y $\tilde{\delta}_{p-1} \circ \tilde{\delta}_p = 0$.

## 10.1 Espacio cociente y operadores de rango cerrado

Sea $X$ un espacio de Banach y $F \subset X$ un subespacio cerrado. Entonces el espacio cociente $X/F$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|[x]\| = d(x,F) = \inf\{\|x+y\|, y \in F\}$$

donde $[x] = x+F$ es la clase de $x$ en $X/F$ ([R-S], III.4).

Sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ un operador. El núcleo de $A$, $\ker A = A^{-1}(0)$ es un subespacio cerrado de $X$ por la continuidad de $A$. La imagen de $A$, $\operatorname{Im} A = AX$, en cambio, no es necesariamente cerrada. En los casos en que sí lo sea diremos que $A$ es un *operador de rango cerrado.*

## 10.2 Lema

Sea $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ un operador de rango cerrado. Entonces la biyección inducida por $A$

$$\tilde{A} : X/\ker A \longrightarrow \operatorname{Im} A$$
$$\tilde{A}[x] = Ax$$

es un operador inversible con $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.

DEM

Tanto $X/\ker A$ como $\operatorname{Im} A$ son espacios de Banach, pues tanto el núcleo como la imagen de $A$ son cerrados. Es trivial que $\tilde{A}$ está bien definido y es lineal. $\tilde{A}$ es continuo pues

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}[x]\| &= \|A(x+y)\| \qquad &\forall y \in \ker A \\ &\leq \|A\|\,\|x+y\| \qquad &\forall y \in \ker A \end{aligned}$$

Luego $\left\|\tilde{A}[x]\right\| \leq \|A\| \|[x]\|$, resultando $\left\|\tilde{A}\right\| \leq \|A\|$. Además, para cada $\varepsilon > 0$ existe algún $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$ y $\|Ax\| > \|A\| - \varepsilon$. Pero $\|[x]\| \leq \|x\| \leq 1$, luego $\left\|\tilde{A}[x]\right\| = \|Ax\| > \|A\| - \varepsilon$. De ahí que $\left\|\tilde{A}\right\| \geq \|A\|$.

Finalmente, $\tilde{A} \in \mathcal{L}(X/\ker A, \operatorname{Im} A)$ es biyectivo y por lo tanto ([R-S], teorema III.11) $\tilde{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\operatorname{Im} A, X/\ker A)$.

## 10.3 Corolario

En las condiciones del lema anterior, dado $Ax = y$ se podrá encontrar $x' \in X$ tal que $Ax' = y$, $\|x'\| \leq K\|y\|$, toda vez que $K > \left\|\tilde{A}^{-1}\right\|$.

DEM

Como $y \in \operatorname{Im} A$, se puede tomar $[u] = \tilde{A}^{-1}y$. $Au = \tilde{A}[u] = y$. $[u] \leq \left\|\tilde{A}^{-1}\right\| \|y\|$. Esto quiere decir que $\inf\{\|u+z\| : z \in \ker A\} \leq \left\|\tilde{A}^{-1}\right\| \|y\|$. Existe entonces algún $x' = u + z$ con $\|x'\| \leq \left\|\tilde{A}^{-1}\right\| \|y\|$ y $Ax' = Ax' + A(u-x) = Au = Ax = y$.

## 10.4 Teorema

Sea $\delta : \Lambda \to \mathcal{D}(Y)$ un complejo de cadena paramétrico finito como en 9.2. Sea $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $(Y, \delta_p(\lambda_0))$ es exacto. Entonces existe un entorno $U$ de $\lambda_0$ tal que $(Y, \delta_p(\lambda))$ es exacto para todo $\lambda \in U$.

DEM

Fijemos $p \in \mathbf{Z}$. Sea $A = \delta_{p+1}(\lambda_0)$, $B = \delta_p(\lambda_0)$. Entonces

$$X_{p+1} \overset{A}{\longrightarrow} X_p \overset{B}{\longrightarrow} X_{p-1}$$

es una sucesión exacta de espacios de Banach, e $\operatorname{Im} A = \ker B$ es un subespacio cerrado (los núcleos son cerrados). También $\operatorname{Im} B$ es cerrado, pues coincide con $\ker \delta_{p-1}(\lambda_0)$.

De acuerdo al lema 10.2 se puede definir el operador $\tilde{A} : X_{p+1}/\ker A \to \operatorname{Im} A$, que resulta un isomorfismo de espacios de Banach. Su inverso $\tilde{A}^{-1}$ es un operador lineal continuo. Sea $k = k_{p+1}(\lambda) = \left\|\tilde{A}^{-1}\right\|$.

1. Dada una sucesión exacta de espacios de Banach

$$X \xrightarrow{A} Y \xrightarrow{B} Z$$

donde $\operatorname{Im} B$ es cerrado, sean $A' \in \mathcal{L}(X,Y)$, $B' \in \mathcal{L}(Y,Z)$ tales que $\|A - A'\|$, $\|B - B'\| < \gamma$. Entonces existe $K > 0$ tal que para todo $y \in \ker B'$ existe $x \in X$ tal que

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq K\|y\| \\ \|A'x - y\| &\leq K\gamma\|y\| \end{aligned}$$

*Dem:* Sea $y \in \ker B'$ fijo. Sean $K_0 > \left\|\tilde{B}^{-1}\right\|$, $K_1 > \left\|\tilde{A}^{-1}\right\|$. $\|By\| = \|By - B'y\| < \gamma\|y\|$. Por 10.3 existe $y' \in Y$ tal que $By' = By$, $\|y'\| < K_0\|By\|$. Luego $\|y'\| < K_0\gamma\|y\|$. Como $y - y' \in \ker B = \operatorname{Im} A$, existe $x' \in X$ tal que $Ax = y - y'$. Nuevamente por 10.3 existe $x \in X$ tal que $Ax = Ax'$, $\|x\| < K_1\|Ax\| = K_1\|y - y'\|$. $\|y - y'\| \leq \|y\| + \|y'\| < \|y\| + K_0\gamma\|y\| < (1 + K_0\gamma)\|y\|$. Luego

$\|x\| < (1+K_0\gamma)K_1 \|y\|$.

$$\begin{aligned}
\|A'x-y\| &\leq \|A'x-Ax\|+\|Ax-y\| \\
&\leq \|A-A'\|\,\|x\|+\|(y-y')+y\| \\
&< \gamma\|x\|+\|y'\| \\
&< \gamma(1+K_0\gamma)K_1\,\|y\|+K_0\gamma\|y\| \\
&< \gamma K\,\|y\|
\end{aligned}$$

con $K = 1+K_0\gamma K_1+K_0\gamma$.

2. Existe un $\gamma$ tal que si $\|A-A'\|$, $\|B-B'\| < \gamma$ y $B'A' = 0$, entonces la sucesión

   $X \overset{A'}{\longrightarrow} Y \overset{B'}{\longrightarrow} Z$ es exacta.

   *Dem:* Podemos elegir $\gamma$ en la parte anterior tan chico como sea necesario. Tomamos $\gamma$ tal que $K\gamma < \frac{1}{2}$. Sea $y \in \ker B'$ cualquiera. Existe $x_1 \in X$ tal que

$$\begin{aligned}
\|x_1\| &< K\,\|y\| \\
\|A'x_1-y\| &< \tfrac{1}{2}\,\|y\|
\end{aligned}$$

   Sea $y_2 = A'x_1 - y \in \ker B'$. Existe $x_2$ tal que

$$\|x_2\| < K\,\|y_2\| < \tfrac{K}{2}\,\|y\|$$
$$\|A'x_2-y_2\| < \tfrac{1}{2}\,\|y_2\| = \tfrac{1}{2}\,\|A'x_1-y\| \leq \tfrac{1}{4}\,\|y\|$$

En general podemos definir dos sucesiones $x_n$, $y_n$ tales que

$$\begin{aligned}\|y_n\| &< \tfrac{1}{2^n}\|y\| \\ \|x_n\| &< \tfrac{K}{2^{n-1}}\|y\| \\ \left\|\sum_{i=1}^{n} A'x_i - y\right\| &< \tfrac{1}{2^n}\|y\|\end{aligned}$$

Sea $x = \sum_{i=1}^{\infty} A'x_i$. Será $A'x = y$.

3. Aplicando la técnica anterior a las finitas parejas de operadores $A = \delta_p(\lambda_0)$, $B = \delta_{p-1}(\lambda_0)$, $0 \leq p \leq n$ se obtiene $\gamma = \min \gamma_p$ tal que si $\max_p \left\{ \left\| \delta_p(\lambda) - \delta(\lambda_0) \right\| \right\} < \gamma$ entonces el complejo es exacto. La continuidad de la diferencial $\delta_p(\lambda)$ garantiza que para algún $\alpha > 0$, $\|\lambda - \lambda_0\| < \alpha$ implica $\left\| \delta_p(\lambda) - \delta_p(\lambda_0) \right\| < \gamma$. El entorno buscado es $U = \{\|\lambda - \lambda_0\| < \alpha\}$ $\square$

## 10.5 Corolario

Si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ es una n-upla conmutativa de operadores en $\mathcal{L}(X)$ entonces $\sigma(a)$ es cerrado, porque $\mathbf{C}^n \setminus \sigma(a)$, el conjunto de los $\lambda$ tal que $E(X, a - \lambda)$ es exacto, es abierto.

## 10.6 Observación

En la demostración anterior se puede observar que $\|x\| \leq K\|y\|$. Por lo tanto, para todo $y \in \ker B'$ existe $x \in X$ tal que $A'x = y$, $\|x\| \leq K\|y\|$. O sea, $k_p(\lambda) = \left\| \tilde{A}^{-1} \right\| \leq K = K(p)$. Aplicando este resultado a las finitas parejas de operadores del complejo se obtiene una cota $M = \max_p K(p) + 1$ tal que $k_p(\lambda) < M$ para todo $\lambda \in U$.

## 10.7 Teorema

Sea $\Lambda$ un espacio topológico localmente compacto, $Y = \{Y_p\}$ una sucesión de epacios de Banach y $\delta : \Lambda \to \mathcal{D}(Y)$ un complejo de cadena paramétrico finito tal que $(Y, \delta(\lambda))$ es exacto para todo $\lambda \in \Lambda$. Entonces, el complejo $C(\Lambda, Y, \delta)$ es exacto.

DEM

Suponemos primero $\Lambda$ compacto. De acuerdo a 10.6, para cada $\lambda$ existe un entorno en el cual $k_p(\lambda)$ es acotado para todo $p$. Siendo $\Lambda$ compacto, se puede tomar una cota $M$ tal que $k_p(\lambda) < M$ para todo $\lambda \in \Lambda$, $0 \leq p \leq n$. Sea $f \in \ker \delta_p$; esto es, $\delta_p(\lambda) f(\lambda) = 0 \, \forall \lambda \in \Lambda$. Sean $\alpha_1$, $\alpha_2 > 0$. $C(\Lambda, Y_p)$ es un espacio de Banach con la norma $\| f \| = \sup_{\lambda \in \Lambda} \| f(\lambda) \| < \infty$ pues $\Lambda$ es compacto. Para cada $\lambda \in \Lambda$ existe un abierto $U_\lambda$ tal que

$$\begin{array}{rcll} \| f(\lambda) - f(\lambda') \| & < & \alpha_1 & \quad \forall \lambda' \in U_\lambda \\ \left\| \delta_{p+1}(\lambda) - \delta_{p+1}(\lambda') \right\| & \leq & \alpha_2 & \quad \forall \lambda' \in U_\lambda \end{array}$$

y para cada $\lambda$ hay un $x'_\lambda \in Y_{p+1}$ tal que $\delta_{p+1}(\lambda) x'_\lambda = f(\lambda)$, pues $f(\lambda) \in \ker \delta_p(\lambda)$ y el complejo es exacto. Entonces

$$\left\| \left[ x'_\lambda \right] \right\| \leq k_p(\lambda) \left\| \delta_{p+1}(\lambda) x'_\lambda \right\| \leq M \| f(\lambda) \|$$

(donde $\left[ x'_\lambda \right]$ es la clase de $x'_\lambda$ en $Y_{p+1} / \ker \delta_{p+1}$) y existe $x_\lambda$ tal que $\delta_{p+1}(\lambda) x_\lambda = f(\lambda)$ y $\| x_\lambda \| \leq M \| f \|$.

$\{U_\lambda\}$ es un cubrimiento por abiertos del compacto $\Lambda$. Podemos tomar un subcubrimiento finito $U_1, \ldots, U_N$, $U_i = U_{\lambda_i}$, $x_i = x_{\lambda_i}$.

Sea

$$g_0(\lambda) = \sum_{i=1}^{N} x_i \varphi_i(\lambda)$$

donde $\{\varphi_i\}$ es una partición de la unidad asociada al cubrimiento $\{U_i\}$. Como $\|x_i\| \leq M\|f\|$,

$$\|g_0(\lambda)\| \leq M\|f\|$$

$\delta_{p+1}(\lambda)g_0 - f$ es una primera aproximación a $f$:

$$\begin{aligned}
\left\|\delta_{p+1}(\lambda)g_0 - f\right\| &= \left\|\sum_{i=1}^{N} (\delta_{p+1}(\lambda)x_i - f(\lambda))\, \varphi_i(\lambda)\right\| \\
&\leq \left\|\sum_{i=1}^{N} (\delta_{p+1}(\lambda)x_i - \delta_{p+1}(\lambda_i)x_i + f(\lambda_i) - f(\lambda))\, \varphi_i(\lambda)\right\| \\
&\leq \sum_{i=1}^{N} \left(\left\|\delta_{p+1}(\lambda)x_i - \delta_{p+1}(\lambda_i)\right\| \|x_i\| + \|f(\lambda_i) - f(\lambda)\|\right) \|\varphi_i(\lambda)\|
\end{aligned}$$

Puesto que $\lambda \in U_i$ en donde $\varphi_i(\lambda)$ no es cero, los primeros términos están acotados por $\alpha_2 \|x_i\|$ y los segundos por $\alpha_1$, resultando

$$\left\|\delta_{p+1}(\lambda)g_0 - f\right\| \leq \alpha_2 \|x_i\| + \alpha_1 \leq \alpha_2 M \|f\| + \alpha_1$$

Tomando ahora $\alpha_2$ y $\alpha_1$ convenientes obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\|\delta_{p+1}g_0 - f\right\| &< \tfrac{1}{2} \\
\|g_0\| &< M\|f\|
\end{aligned}$$

Sean $f_0 = f$, $f_1 = f_0 - \delta_{p+1}g_0$. Repitiendo el procedimiento se puede obtener

$g_1$ tal que

$$\left\|\delta_{p+1}g_1 - f_1\right\| = \left\|\delta_{p+1}(g_1+g_0) - f\right\| < \tfrac{1}{4}$$
$$\|g_1\| < M\|f_1\| < \tfrac{M}{2}$$

En general, se obtiene una sucesión de funciones $g_i \in C(\Lambda, Y_{p+1})$ tal que

$$\begin{array}{rcl} \|g_i\| & \leq & \frac{M}{2^i} \\ \left\|\delta_{p+1}\left(\sum_{j=0}^{i} g_j\right) - f\right\| & < & \frac{1}{2^{i+1}} \end{array}$$

La función $g = \sum_{i=1}^{\infty} g_i$ cumple

$$\delta_{p+1}g = f$$

En el caso localmente compacto podemos tomar un entorno compacto de cada punto, obtener un subcubrimiento localmente finito $\{U_i\}$ y una partición de la unidad $\{\varphi_i\}$ asociada a él ([Kelley], 5.W). Para cada $U_i$ encontramos una $g_i$ que coincida con $f$ sobre el compacto $\overline{U_i}$, para terminar definiendo

$$g = \sum g_i \varphi_i \square$$

# 11 Complejos de funciones analíticas

Sea $X$ un espacio de Banach y $U \subset \mathbf{C}^n$ un abierto. Una función $f : U \to X$ es analítica (holomorfa) en $U$ si admite para cada $w \in U$ un desarrollo en serie de potencias absolutamente convergente en un entorno $V$ de $w$:

$$f(z) = \sum a_i (z-w)^i \tag{13}$$

donde $i = (i_1, \dots, i_n)$ recorre todas las n-uplas de enteros mayores o iguales a cero, $(z-w)^i = (z_1 - w_1)^{i_1} \cdots (z_n - w_n)^{i_n}$ y $a_i \in X$ para cada $i$.

Notaremos con $\mathbf{A}(U,X)$ al conjunto de las funciones $U \to X$ que son analíticas.

Asociamos a la serie de potencias (13) la serie de potencias real

$$\sum_i \|a_i\| r^{|i|} \tag{14}$$

donde $|i| = i_1 + \cdots + i_n$, $r \in \mathbf{R}$.

Presentamos algunos lemas clásicos sobre funciones analíticas. Si bien nuestras funciones tienen imagen en un espacio de Banach en lugar de $\mathbf{R}$ o $\mathbf{C}$, las demostraciones pueden repetirse paso a paso de las versiones conocidas para funciones con codominio en $\mathbf{C}$.

## 11.1 Lema

Si $f$ es una función analítica en $w \in U$ la serie (14) es convergente en un entorno de cero.

DEM

La serie (13) es absolutamente convergente en un entorno $V$ de $w$; tomando $r$ tal que $(w_1 + r, \dots, w_n + r) \in V$ se obtiene la convergencia de (14).

## 11.2 Lema

Si $R > 0$ es el radio de convergencia de (14), la serie (13) es convergente en el polidisco $D = \{z \in U : \max(|w_1 - z_1|, \ldots, |w_n - z_n|) < R\}$.

DEM

Si $(z_1, \ldots, z_n) \in D$, la serie

$$\sum_i \|a_i\| \, |w_1 - z_1|^{i_1} \cdot \cdots \cdot |w_n - z_n|^{i_n}$$

queda acotada por $\sum \|a_i\| r^{|i|}$, donde $r = \max(|w_1 - z_1|, \ldots, |w_n - z_n|)$.

## 11.3 Lema

La representación de una función $\delta : U \subset \mathbf{C}^n \to X$ como serie de potencias es única. ([Mujica], Lema 4.7)

## 11.4 Lema

Sean

$$A(z) = \sum_i a_i z^i \qquad a_i \in \mathcal{L}(X, Y)$$
$$x(z) = \sum_i x_i z^i \qquad x_i \in X$$

absolutamente convergentes en un entorno $U$ de cero. Entonces la serie ”producto”

$$\sum_{i,j} a_i x_j z^{i+j}$$

que representa a $A(z)x(z)$ es convergente en un entorno de cero

DEM

Es consecuencia del lema 11.2. En efecto, la serie de los módulos es

$$\sum_{i,j} \|a_i\| \left\|x_j\right\| r^{i+j}$$

y representa al producto de dos funciones analíticas reales, $\sum_i \|a_i\| r^i$ y $\sum_j \left\|x_j\right\| r^j$, de manera que es convergente en un entorno de cero.

## 11.5 Lema (Serie de Laurent)

Toda función $g \in \mathbf{A}(\mathbf{C}\setminus\{0\},X)$ ($X$ un espacio de Banach) se escribe de manera única como

$$g(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} x_n z^n$$

para algunos $x_n \in X$, de manera que

1. La serie $\sum_{n\geq 0} x_n z^n = g_1(z)$ converge para todo $z \in \mathbf{C}$
2. La serie $\sum_{n>0} x_{-n} z^n = g_2(z)$ converge para todo $z \in \mathbf{C}$
3. $g(z) = g_1(z) + g_2(1/z)$ es suma de dos funciones analíticas en $\mathbf{C}\setminus\{0\}$ con $g_1$ analítica también en cero y $g_2(0) = 0$.

([B-G], Prop. 2.4.8)

## 11.6 Lema (Teorema de Liouville)

Si $g \in \mathbf{A}(\mathbf{C},X)$, $X$ espacio de Banach, es acotada, entonces es constante. (Ver [B-G], 2.1.20), ([Mujica], Prop. 5.10)

Sea $Y = \{Y_p, p \in \mathbf{Z}\}$ una sucesión de espacios de Banach. El conjunto $\mathcal{L}(Y_p, Y_{p-1})$ de operadores continuos es un espacio de Banach y podemos considerar el conjunto $\mathbf{A}(U, \mathcal{L}(Y_p, Y_{p-1}))$.

## 11.7 Definición (Complejo Analítico)

Sea $\delta : U \to \mathcal{D}(Y)$ un complejo paramétrico de espacios de Banach, con $U \subset \mathbf{C}^n$ abierto. Diremos que $\delta$ es *analítico* si $\delta_p : U \to \mathcal{L}(Y_p, Y_{p-1})$ es analítica para cada $p \in \mathbf{Z}$.

## 11.8 Observación

Sea $(a_1, \ldots, a_n)$ una n-upla de operadores en $\mathcal{L}(X)$ que conmutan entre sí. Sea $\delta(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ el operador de borde del complejo de Koszul $E(X, a_1 - \lambda_1, \ldots, a_n - \lambda_n)$. Entonces $\delta : \mathbf{C}^n \to \mathcal{D}(E^n(X))$ es un complejo de cadena paramétrico analítico. Más aún, cada $\delta_p : \mathbf{C}^n \to \mathcal{L}(E^n_p(X), E^n_{p-1}(X))$ es un polinomio de grado 1 en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

DEM

Sea $\xi \in E^n_p(X)$. De acuerdo a (6),

$$\xi = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{B}^n_p} x_\varepsilon \otimes \varepsilon = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{B}^n_p} (P_\varepsilon \xi) \otimes \varepsilon$$

Donde $P_\varepsilon \in \mathcal{L}(E^n_p(X), X)$ se define por

$$P_{\varepsilon_0} \sum_{\varepsilon \in \mathcal{B}^n_p} x_\varepsilon \otimes \varepsilon = x_{\varepsilon_0} \qquad \text{para } \varepsilon_0 \in \mathcal{B}^n_p$$

Aplicando $\delta_p(\lambda)$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\delta_p(\lambda)\xi &= \sum_{\varepsilon\in\mathcal{B}_p^n} \delta_p(\lambda)(P_\varepsilon\xi)\otimes\varepsilon \\
&= \sum_{\varepsilon\in\mathcal{B}_p^n} \left(\sum_{i=1}^{p}(a_{j_i}-\lambda_{j_i})P_\varepsilon\xi\otimes\hat{\varepsilon}_i\right) \\
&= \sum_{\varepsilon\in\mathcal{B}_p^n}\sum_{i=1}^{p} Q_{\hat{\varepsilon}_i}(a_{j_i}-\lambda_{j_i})P_\varepsilon\xi
\end{aligned}$$

Luego

$$\delta_p(\lambda) = \sum_{\varepsilon\in\mathcal{B}_p^n}\sum_{i=1}^{p} Q_{\hat{\varepsilon}_i}a_{j_i}P_\varepsilon - Q_{\hat{\varepsilon}_i}\lambda_{j_i}P_\varepsilon \tag{15}$$

donde

$$Q_{\hat{\varepsilon}_i} \in \mathcal{L}(X, E^n_{p-1}(X))$$

$$Q_{\hat{\varepsilon}_i}x = x\otimes e_{j_1}\wedge\ldots\widehat{e_{j_i}}\ldots\wedge e_{j_p}\,\square$$

# 12 Complejo $\mathbf{A}(U,Y,\delta)$

## 12.1 Def

Dado un complejo paramétrico analítico de espacios de Banach $\delta: U\to\mathcal{D}(Y)$ se puede definir, de manera análoga a lo hecho anteriormente con las funciones continuas (Sección 10), el complejo $\mathbf{A}(U,Y,\delta)$ sobre los espacios $\left\{\mathbf{A}\left(U,\mathcal{L}(Y_p,Y_{p-1})\right), p\in\mathbf{Z}\right\}$

mediante la diferencial $\tilde{\delta}$ definida por

$$\tilde{\delta}_p f(z) = \delta_p(z) f(z) \tag{16}$$

para $z \in U$, $f \in \mathcal{L}(U, Y_p)$. Buscaremos un resultado similar al teorema 10.7 en el cual se preserve no sólo la continuidad sino también la analiticidad.

## 12.2 Lema

Sean $X, Y, Z$ espacios de Banach y $U \subset \mathbf{C}^n$ abierto. Sean $\alpha : U \to \mathcal{L}(X, Y)$, $\beta : U \to \mathcal{L}(Y, Z)$ analíticas, tales que $\operatorname{Im}\alpha(z) \subset \ker\beta(z)$ para $z \in U$. Sea $z_0 \in U$ tal que la sucesión

$$X \overset{\alpha(z_0)}{\longrightarrow} Y \overset{\beta(z_0)}{\longrightarrow} Z$$

es exacta. Sean $\tilde{\alpha} : \mathbf{A}(U, X) \to \mathbf{A}(U, Y)$, $\tilde{\beta} : \mathbf{A}(U, Y) \to \mathbf{A}(U, Z)$ definidas por

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} f(z) &= \alpha(z) f(z) \\ \tilde{\beta} g(z) &= \beta(z) g(z) \end{aligned}$$

existe entonces un entorno $V$ de $z_0$ tal que

$$\mathbf{A}(V, X) \overset{\tilde{\alpha}}{\longrightarrow} \mathbf{A}(V, Y) \overset{\tilde{\beta}}{\longrightarrow} \mathbf{A}(V, Z)$$

es exacta.

DEM

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $z_0 = 0$. Sean

$$\begin{aligned}\alpha(z) &= \sum_i a_i z^i \\ \beta(z) &= \sum_i b_i z^i\end{aligned}$$

los desarrollos en serie de $\alpha$ y $\beta$, convergentes en un entorno de cero. La exactitud en $z_0$ significa que $\operatorname{Im}\alpha(0) = \ker\beta(0)$. Aplicando el lema 10.2 al operador $A = \alpha(0)$, sea $k = \left\|\tilde{A}^{-1}\right\|$.

Sea $g \in \ker\beta$, o sea, $g \in \mathbf{A}(U,Y)$ tal que $\beta(z)g(z) = 0$ para $z \in U$. Sea

$$g(z) = \sum_i y_i z^i$$

su desarrollo en serie de potencias válido en un entorno de cero. Buscamos una $f \in \mathbf{A}(U,X)$ tal que $g(z) = \alpha(z)f(z)$ para todo $z$. Encontraremos primero los términos de la serie de potencias para $f$

$$f(z) = \sum_i x_i z^i$$

para estudiar a continuación su convergencia.

Especializando en $z = 0$ obtenemos $\alpha(0)f(0) = a_0x_0 = g(0) = y_0$. Pero $\beta(0)g(0) = 0$ y $\ker\beta(0) = \operatorname{Im}\alpha(0)$ por hipótesis, luego existe un $x_0$ tal que $a_0x_0 = y_0$. Mas aún, podemos elegirlo de manera que $\|x_0\| \leq k\|y_0\|$. Aplicando $\tilde{\alpha}$ a $x_0$ obtenemos una serie de potencias que difiere de $g$ únicamente en términos de grado mayor que cero:

$$g(z) - \alpha(z)x_0 = \sum_i (y_i - a_i x_0) z^i$$

Supongamos que se han encontrado los términos $x_i$ de la serie para $f$ hasta el orden $m$, y sea

$$S_m(z) = \sum_{|i|\leq m} x_i z^i$$

La serie $g(z) - \alpha(z)S_m(z)$ contiene únicamente términos de grado mayor o igual a $m+1$:

$$g(z) - \alpha(z)S_m(z) = \sum_{|i|=m+1} w_i z^i + Q_{m+1}(z)$$

donde

$$w_i = y_i - \sum_{0\leq u\leq i} a_u x_{i-u}$$

y $Q_{m+1}(z)$ contiene términos de grado mayor o igual a $m+1$. Aplicamos $\beta(z)$ a la igualdad anterior,

$$\beta(z)\left[g(z) - \alpha(z)S_m(z)\right] = \beta(z)g(z) - \sum_{|i|\leq m} \beta(z)\alpha(z)x_i z^i = 0$$

Por consiguiente $\beta(z)\left(\sum_{|i|=m+1} w_i z^i + Q_{m+1}(z)\right) = 0$. Luego la serie

$$\sum_{\substack{i\\|j|=m+1}} b_i w_j z^{i+j} + \beta(z)Q_{m+1}(z)$$

se anula en un entorno de cero. Todos sus coeficientes deberán ser cero en virtud de la unicidad de la representación como serie de potencias. En particular será $b_0 w_j = 0$ para $|j| = m+1$. Se pueden encontrar por consiguiente los $x_j$ tales que

$$a_0 x_j = w_j \qquad |j| = m+1$$

y completar la serie de $f$ hasta el grado $m+1$. Los $x_j$ pueden tomarse de manera que $\|x_j\| \leq k\|w_j\|$, esto es,

$$\|x_j\| \leq k\left(\|y_j\| + \sum_{0\leq i\leq j} \|a_i\| \|x_{j-i}\|\right)$$

Sea

$$S_{m+1}(z) = S_m(z) + \sum_{|j|=m+1} x_j z^j$$

$$\alpha(z)S_{m+1}(z) = \alpha(z)S_m(z) + \sum_{|j|=m+1} a_0 x_j z^j + \sum_{\substack{|i|>0 \\ |j|=m+1}} a_i x_j z^{i+j}$$

entonces $g(z) - \alpha(z)S_{m+1}(z)$ contiene únicamente términos de orden mayor o igual a $m+2$.

Procediendo inductivamente hemos obtenido una serie para $f$ que hace válida la ecuación formal $\alpha(z)f(z) = g(z)$ entre series de potencias. Para probar la convergencia, sean $\delta, \rho$ positivos tales que

$$\sum_{i>0} \|a_i\| \delta^{|i|} < \rho < \frac{1}{k}$$

Y tal que las series de $g$ y $\alpha$ son absolutamente convergentes en el entorno de cero dado por $P = \{z : \max\{|z_i|, 1 \leq i \leq n\} < \delta\}$. Sea $h$ la función definida en $P$ por

$$h(z) = \frac{\|x_0\|\rho + \sum_{i>0} \|y_i\| z^i}{\rho - \sum_{i>0} \|a_i\| z^i}$$

$h$ es un cociente de funciones analíticas definido en todo $P$ y es por lo tanto una función analítica. Sea $\sum_i \gamma_i z^i$ la serie de potencias asociada, convergente en $P$. Los coeficientes $\gamma_i$ quedan determinados por la relación recursiva

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= x_0 \\ \gamma_j &= \tfrac{1}{\rho}\left( \|y_j\| + \sum_{i\leq j} \|a_i\| \gamma_{j-i} \right) \end{aligned}$$

(Ver [Gleason], Lema 1.7).

Por inducción resulta $\|x_j\| \leq \gamma_j$ para todo $j$ y la serie de potencias de $f$ ha quedado acotada por la de $h$, que es convergente en $P$. Por lo tanto nuestra serie es absolutamente convergente en todo el entorno $P$.

## 12.3 Corolario

Sea $\delta : U \to \mathcal{D}(Y)$ un complejo de cadena paramétrico analítico de espacios de Banach, de longitud finita, $U \subset \mathbf{C}^n$ abierto. Sea $z_0 \in U$ tal que $(Y, \delta(z_0)) =$

$$0 \longrightarrow Y_k \xrightarrow{\delta_k(z_0)} \cdots \xrightarrow{\delta_2(z_0)} Y_1 \xrightarrow{\delta_1(z_0)} Y_0 \longrightarrow 0$$

es exacto. Entonces existe un entorno $V \ni z_0$ tal que $\mathbf{A}(V, Y, \delta) =$

$$0 \longrightarrow \mathbf{A}(V, Y_k) \xrightarrow{\tilde{\delta}_k} \cdots \longrightarrow \mathbf{A}(V, Y_0) \longrightarrow 0$$

también es exacto.

DEM

Bastará tomar la intersección de los entornos obtenidos en el lema 12.2 para cada segmento

$$Y_p \xrightarrow{\delta_p(z_0)} Y_{p-1} \xrightarrow{\delta_{p-1}(z_0)} Y_{p-2} \quad \square$$

## 12.4 Haz de gérmenes de funciones analíticas

Quisiéramos convertir el resultado local obtenido en 12.3 en uno global; esto es, encontrar condiciones sobre $U$ para que la exactitud de $(Y,\delta(z))$ en todo $z \in U$ implique la exactitud de $\mathbf{A}(U,Y,\delta)$. Recurriremos para ello a la teoría de haces.

Definimos el haz $\mathcal{O} = \mathcal{O}(U,X)$ de gérmenes de funciones analíticas (holomorfas) de un abierto $U \subset \mathbf{C}^n$ en un espacio de Banach $X$ como el conjunto que se obtiene al cocientar la clase

$$\{(x,f,V) : U \supset V,\ V \text{ abierto},\ x \in V,\ f \in \mathbf{A}(V,X)\}$$

por la relación de equivalencia

$$(x,f,V) \sim (y,g,W) \Leftrightarrow x = y,\ f/_{V\cap W} = g/_{V\cap W}$$

Dado $x \in V$, $V$ abierto en $U$, $f$ holomorfa en $V$, se notará $[f]_x$ a la clase o *fibra* de $(x,f,V)$. Dotamos a $\mathcal{O}$ de la topología generada por los conjuntos

$$\{f,W\} = \{[f]_x : x \in W\} \tag{17}$$

Dado $V \subset U$ abierto el grupo de secciones de $V$ en $\mathcal{O}$, $\Gamma(V,\mathcal{O})$, coincide con el grupo de las funciones analíticas definidas en $V$, $\mathbf{A}(V,X)$.

El conjunto de las funciones analíticas definidas sobre todo $U$, $\mathbf{A}(U,X)$, es isomorfo al conjunto $\Gamma(U,\mathcal{O})$ de las secciones globales, que a su vez es isomorfo al primer grupo de cohomología $H^0(U,\mathcal{O})$ del haz.

Para las definiciones y los detalles de la construcción del haz de gérmenes de funciones analíticas, cohomología de haces y las propiedades arriba mencionadas puede consultarse, por ejemplo, [Krantz], 6.2.

## 12.5 Lema

Sea $\delta : U \to \mathcal{D}(Y)$ un complejo de cadena paramétrico analítico, tal que

$$0 \longrightarrow Y_k \xrightarrow{\delta_k(z)} \cdots \longrightarrow Y_1 \xrightarrow{\delta_1(z)} Y_0 \longrightarrow 0$$

es exacto para cada $z \in U \subset \mathbf{C}^n$, $\delta_p \in \mathbf{A}(U,\mathcal{L}(Y_p,Y_{p-1}))$ para cada $0 \leq k \leq p$. Entonces $\delta$ induce una sucesión exacta de haces

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(U,Y_k) \xrightarrow{\overline{\delta}_k} \cdots \longrightarrow \mathcal{O}(U,Y_1) \xrightarrow{\overline{\delta}_1} \mathcal{O}(U,Y_0) \longrightarrow 0$$

donde

$$\overline{\delta}_p([f]_z) = [\delta_p f]_z$$

para $z \in U$, $f \in \mathbf{A}(V,Y_p)$.

DEM

1. $\delta_p f \in \mathbf{A}(V,Y_{p-1})$ por el lema 11.4, de manera que $\overline{\delta}_p$ está bien definida

2. $\overline{\delta}_p$ es un morfismo de haces. En efecto:

- $\overline{\delta}_p$ es un morfismo en las fibras:

$$\begin{aligned}
\overline{\delta}_p\left([f]_z+[g]_z\right) &= \overline{\delta}_p([f+g]_z)\\
&= [\delta_p(f+g)]_z\\
&= [\delta_p f+\delta_p g]_z\\
&= [\delta_p f]_z+[\delta_p g]_z\\
&= \overline{\delta}_p\left([f]_z\right)+\overline{\delta}_p\left([g]_z\right)
\end{aligned}$$

- $\overline{\delta}_p$ es continuo: Sea $\{f,V\}$ un abierto elemental de $O(U,Y_{p-1})$ como en (17). Sea $[h]_{z_0}\in\overline{\delta}_p^{-1}(\{f,V\})$. Entonces $\delta_p(z)h(z)=f(z)$ para todo $z$ en un entorno $W$ de $z_0$. Para cada $z\in W\cap V$ será $\overline{\delta}_p\left([h]_z\right)=[f]_z\in\{f,V\}$, resultando el abierto $\{h,V\cap W\}\subset\overline{\delta}_p^{-1}(\{f,V\})$

- $\overline{\delta}_{p-1}\circ\overline{\delta}_p=0$:
$$\overline{\delta}_{p-1}\left(\overline{\delta}_p\left([f]_z\right)\right)=[\delta_{p-1}\delta_p f]_z=[0]_z$$

- $\operatorname{Im}\overline{\delta}_p=\ker\overline{\delta}_{p-1}$: Sea $[g]_z\in\ker\overline{\delta}_{p-1}$. Entonces $[\delta_p g]_z=[0]_z$. Esto significa que la función $\delta_p g$ se anula en un entorno de $z$. Además, la sucesión

$$Y_p\xrightarrow{\delta_p(z)}Y_{p-1}\xrightarrow{\delta_{p-1}(z)}Y_{p-2}$$

es exacta por hipótesis. Por el lema 12.3 existirá un entorno $V\subset W$ de $z$ donde

$$\mathbf{A}(V,Y_p)\xrightarrow{\overline{\delta}_p}\mathbf{A}(V,Y_{p-1})\xrightarrow{\overline{\delta}_{p-1}}\mathbf{A}(V,Y_{p-2})$$

es exacta. $\delta_p g\mid_V=0$, de modo que $g\in\ker\delta_{p-1}\mid_V=\operatorname{Im}\delta_p\mid_V$ por la exactitud. Existirá entonces $h \in \mathbf{A}(V, Y_p)$ tal que $\delta_p h = g$. Resulta $[g]_z = [\delta_p h]_z = \bar{\delta}_p\left([h]_z\right)$ $\square$

## 12.6 Observación

Fijados un abierto $U \subset \mathbf{C}^n$ y una sucesión finita de espacios de Banach $Y_0, \ldots Y_k$, notaremos con $O_p = O(U, Y_p)$ al correspondiente haz de funciones analíticas.

Dado un cubrimiento $\mathcal{U}$ de $U$ por abiertos, notaremos con $C^r(\mathcal{U}, O_p)$ a los grupos de r-cocadenas y con $\varepsilon_p^r : C^r(\mathcal{U}, O_p) \to C^{r+1}(\mathcal{U}, O_p)$ al operador de coborde. Sean $Z^r(\mathcal{U}, O_p) = \ker \varepsilon_p^r$ los grupos de cociclos, $B^r(\mathcal{U}, O_p) = \operatorname{Im} \varepsilon_{p-1}^r$ los cobordes y $H^r(\mathcal{U}, O_p) = Z^r(\mathcal{U}, O_p)/B^r(\mathcal{U}, O_p)$ los grupos de cohomología correspondientes. Los grupos de cohomología $H^r(U, O_p)$ de $U$ son el límite directo de los grupos $H^r(\mathcal{U}, O_p)$ sobre todas las particiones $\mathcal{U}$.

## 12.7 Lema

En las condiciones del lema 12.5, supongamos que la cohomología de todos los haces $O_p$ es trivial. Esto es,

$$H^i(U, O_p) \quad = \quad \{0\} \qquad \text{para } i > 0$$

Entonces se tendrá que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathbf{A}(U, Y_k) \xrightarrow{\delta_k} \mathbf{A}(U, Y_{k-1}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathbf{A}(U, Y_1) \xrightarrow{\delta_1} \mathbf{A}(U, Y_0) \longrightarrow 0$$

es exacta.

DEM

Sea $\mathcal{Z}_p = \ker \overline{\delta}_p$ el subhaz de las funciones que localmente pertenecen al núcleo de $\delta_p$. Entonces

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}_p \xrightarrow{\;i\;} \mathcal{O}_p \xrightarrow{\;\overline{\delta}_p\;} \mathcal{Z}_{p-1} \longrightarrow 0$$

(donde $i$ es la inclusión) es una sucesión exacta de haces, pues el núcleo de $\overline{\delta}_p$ es $\mathcal{Z}_p$, y su imagen $\mathcal{Z}_{p-1}$, el núcleo de $\overline{\delta}_{p-1}$, conforme al lema 12.5. Esta sucesión induce una sucesión exacta larga en las cohomologías:

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & \longrightarrow & H^0(U,\mathcal{Z}_p) & \longrightarrow & H^0(U,\mathcal{O}_p) & \longrightarrow & H^0(U,\mathcal{Z}_{p-1}) \\
 & \longrightarrow & H^1(U,\mathcal{Z}_p) & \longrightarrow & H^1(U,\mathcal{O}_p) & \longrightarrow & H^1(U,\mathcal{Z}_{p-1}) \\
 & \longrightarrow & H^2(U,\mathcal{Z}_p) & \longrightarrow & \cdots & &
\end{array}$$

(Este resultado es [Krantz], Teorema 6.2.16, para espacios que sean paracompactos; $Y_p$, como todo espacio métrico, lo es)

Por hipótesis es $H^i(U,\mathcal{O}_p) = 0$ para $i > 0$, luego hay una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^i(U,\mathcal{Z}_{p-1}) \longrightarrow H^{i+1}(U,\mathcal{Z}_p) \longrightarrow 0$$

para $i > 0$ y cualquier $p$. Si uno de estos grupos es trivial el otro también lo será.

Dado que para $k < p$ es $Y_p = \{0\}$ y por lo tanto también $H^i(U,\mathcal{Z}_p) = 0$, por inducción obtenemos $H^i(U,\mathcal{Z}_p) = 0$ para todo $i > 0$. En particular $H^1(U,\mathcal{Z}_p) = 0$ para cualquier $p$ y por consiguiente

$$0 \longrightarrow H^0(U,\mathcal{Z}_p) \longrightarrow H^0(U,\mathcal{O}_p) \longrightarrow H^0(U,\mathcal{Z}_{p-1}) \longrightarrow 0$$

es exacta.

$H^0(U, \mathcal{Z}_p)$ es el conjunto de las secciones globales, que por definición es

$$\Gamma(U, \mathcal{Z}_p) = \ker \delta_p = \left\{ f \in \mathbf{A}(U, Y_p) : f(z) \in \ker \delta_p(z) \forall z \in U \right\}$$

y la acción de $\overline{\delta}_p$ sobre los gérmenes de funciones corresponde a la de $\delta_p$ sobre las secciones globales, de manera que la sucesión anterior se reescribe

$$0 \longrightarrow \ker \delta_p \xrightarrow{i} \mathbf{A}(U, Y_p) \xrightarrow{\delta_p} \ker \delta_{p-1} \longrightarrow 0$$

Resultando la imagen de $\delta_p$ igual al núcleo de $\delta_{p-1}$, de modo que

$$0 \longrightarrow \mathbf{A}(U, Y_k) \xrightarrow{\delta_k} \cdots \longrightarrow \mathbf{A}(U, Y_0) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta$\square$

## 12.8 Dominios de Holomorfía

Un abierto $U \subset \mathbf{C}^n$ se llama *dominio de holomorfía* ("domain of holomorphy") si no existen abiertos $U_1, U_2$ tales que $U_2$ sea conexo, $U_2 \not\subset U$, $U_1 \subset U_2 \cap U$ y para cada función holomorfa $\varphi \in \mathbf{A}(U, \mathbf{C})$ existe una $\psi \in \mathbf{A}(U_2, \mathbf{C})$ tal que $\varphi = \psi$ en $U_1$.

Si bien esta definición es difícil de manejar, es fácil ver que cualquier abierto conexo en $\mathbf{C}$ es un dominio de holomorfía, y también todo subconjunto convexo de $\mathbf{C}^n$ (ver [Krantz], 0.3.1). La equivalencia de esta con otras definiciones de dominio de holomorfía (pseudoconvexidad) es sujeto de discusión en la teoría del análisis complejo. A nosotros nos interesa sólo el siguiente resultado

## 12.9 Lema

Si $U$ es un dominio de holomorfía, entonces $H^r(U, \mathcal{O}(U,X)) = 0$ para todo espacio de Banach $X$ y para todo $r > 0$.

Este teorema es exactamente el corolario 6.3.2 de [Krantz]. Su demostración se basa en dos hechos:

1) Toda forma cerrada sobre un dominio de holomorfía es exacta (ecuación $\bar{\partial}$), teoremas 41.3 y 42.5 de [Mujica].

2) Los grupos de cohomología de Dolbeault $\ker\bar{\partial}/\operatorname{Im}\bar{\partial}$ son isomorfos a los grupos de cohomología $H^r(U, \mathcal{O})$ (*isomorfismo de Dolbeault)*. La demostración de este hecho que se halla en [Krantz] 6.3.1 para funciones con codominio en $\mathbf{C}$ se aplica igualmente cuando toman valores en un espacio de Banach.

## 12.10 Teorema

Sea $U \subset \mathbf{C}^n$ un dominio de holomorfía, $\delta : U \to \mathcal{D}(Y)$ un complejo de cadena paramétrico analítico finito. Si el complejo $(Y, \delta(z))$ es exacto para todo $z \in U$, entonces el complejo $\mathbf{A}(U,Y,\delta)$ es exacto.

DEM

Por el lema 12.9, el haz $\mathcal{O}(U,Y_p)$ tiene homología trivial para cada $p$. El lema 12.7 indica que el complejo $\mathbf{A}(U,Y,\delta)$ es exacto en este caso□

# 13 Exactitud en $\infty$

Sea $\delta : U \to \mathcal{D}(Y)$ un complejo de cadena paramétrico analítico de espacios de Banach. Decimos que $\delta$ es *exacto en* $\infty$ si $\beta_p(w) = w\delta_p(1/w)$ tiene una singularidad evitable en cero para todo $p$ y el complejo $(Y, \beta(0))$ es exacto.

## 13.1 Lema

Sea $\delta_p(z) = a_p + zb_p$ con $a_p$, $b_p \in \mathcal{L}(Y_p, Y_{p-1})$ para $k \geq p \geq 0$. Si el complejo $(Y, \delta)$ es exacto para cada $z \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ entonces para cada $y_p \in \bigcap_{z \in \mathbf{C}} \ker \delta_p(z)$ existe un $y_{p+1} \in Y_{p+1}$ tal que $\delta_{p+1}(z) y_{p+1} = y_p$ para todo $z \in \mathbf{C}$.

DEM

Sea $\beta(z) \in \mathcal{D}(Y)$ definida por

$$\beta_p(w) = w\delta_p(1/w) = wa_p + b_p$$

Entonces $(Y, \beta(w))$ es exacto para todo $w \in \mathbf{C}$. Si $w = 0$ será por la exactitud de $\delta$ en $\infty$; si $w \neq 0$,

$$\begin{aligned}
x \in \ker \beta_{p-1} \quad &\Leftrightarrow \quad \beta_{p-1}(w)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w\delta_{p-1}(1/w)x = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad wx \in \ker \delta_{p-1}(1/w) \quad \Leftrightarrow \quad wx \in \operatorname{Im} \delta_p(1/w) \\
&\Leftrightarrow \quad wx = \delta_p(1/w) y \quad \Leftrightarrow \quad x = w\delta_p(1/w) \tfrac{y}{w^2} \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \operatorname{Im} \beta_p(w).
\end{aligned}$$

Sea $y_p \in Y_p$ tal que $\delta_p(z) y_p = 0 \ \forall z \in C$. Entonces también $\beta_p(z) y_p = 0 \ \forall z \in C$.

Por el teorema 12.10, existen $f_1,\ f_2 \in \mathbf{A}(\mathbf{C}, Y_{p+1})$ tales que

$$\begin{aligned} \delta_{p+1}(z) f_1(z) &= y_p \qquad && \forall z \in \mathbf{C} \\ \beta_{p+1}(z) f_2(z) &= y_p \qquad && \forall z \in \mathbf{C} \end{aligned}$$

luego entonces

$$\delta_{p+1}(z) \left[ f_1(z) - \frac{1}{z} f_2 \left( \frac{1}{z} \right) \right] = 0 \qquad \forall z \neq 0$$

Utilizando nuevamente el teorema 12.10 existe $g \in \mathbf{A}(\mathbf{C} \setminus \{0\}, Y_{p-2})$ tal que $\delta_{p+2}(z) g(z) = f_1(z) - \frac{1}{z} f_2(\frac{1}{z})$ para todo $z \neq 0$. Por la escritura en serie de Laurent (Lema 11.5), existe un par de funciones $g_1 \in \mathbf{A}(\mathbf{C}, Y_{p-2})$, $g_2 \in \mathbf{A}(\mathbf{C}, Y_{p-2})$ tal que

$$\begin{aligned} g(z) &= g_1(z) + g_2(1/z) \\ g_2(0) &= 0 \end{aligned}$$

La función $\delta_{p+2}(1/w) g_2(w) = a_{p+2} g_2(w) + b_{p+2} \dfrac{1}{w} g_2(w)$ tiene una singularidad evitable en 0, dado que $g_2(0) = 0$. Esto significa que $\delta_{p+2}(z) g_2(1/z)$ tiene límite cuando $z \to \infty$. La función

$$f_1(z) - \delta_{p+2}(z) g_1(z) = \frac{1}{z} f_2(\frac{1}{z}) - \delta_{p+2}(z) g_2(\frac{1}{z})$$

es analítica en $\mathbf{C}$ por la expresión de la izquierda, y en $\mathbf{C} \setminus \{0\} \cup \{\infty\}$ por la expresión de la derecha. Por el teorema de Liouville, deberá ser constante. Sea $y_{p+1}$ esa constante. Entonces $\delta_p(z) y_{p+1} = y_p$ para todo $z$ $\square$

# 14 Propiedades del Espectro

## 14.1 Definición

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach. Se llama ra*dio espectral* $r_\sigma(a)$ de $a \in \mathcal{A}$ al número

$$r_\sigma(a) \ = \sup_{z\in\sigma(a)} |z|$$

Llamaremos *multi-radio espectral* de $a = (a_1,...,a_n) \in \mathcal{A}^n$ a la $n$-upla

$$r_\sigma(a) \ = \ (r_\sigma(a_1),...,r_\sigma(a_n))$$

## 14.2 Lema

El espectro de Taylor de $a = (a_1,\dots,a_n)$, está contenido en el polidisco cerrado $D_{r_\sigma(a_1)} \times ... \times D_{r_\sigma(a_n)}$, de multiradio $r_\sigma(a)$.

DEM

Sea $z \ = \ (z_1,...,z_n) \in \mathbf{C}^n \backslash r_\sigma(a)$. Entonces$|z_i| > r_\sigma(a_i)$ para algún $i$. Esto quiere decir que $a_i - \lambda_i I$ es no singular y, por el corolario 8.3, $(a_1 - z_1,...,a_n - z_n)$ también es no singular. Por lo tanto, $z \notin \sigma(a)$.

## 14.3 Teorema

El espectro $\sigma(a)$ es compacto.

DEM

Por el lema 14.2, $\sigma(a)$ es un subconjunto acotado de $\mathbf{C}^n$. Además, en el corolario 10.5 vimos que $\sigma(a)$ es cerrado.

## 14.4 Teorema (Propiedad de la proyección)

Sean $a_1,\dots,a_n,a_{n+1}$ operadores en $\mathcal{L}(X)$ que conmutan entre sí. Entonces

$$\pi(\sigma(a_1,\dots,a_n,a_{n+1})) = \sigma(a_1,\dots,a_n)$$

donde $\pi : \mathbf{C}^{n+1} \to \mathbf{C}^n$ es la proyección sobre las primeras $n$ coordenadas.

DEM

Conocemos ya la inclusión

$$\pi(\sigma(a_1,\dots,a_n,a_{n+1})) \subset \sigma(a_1,\dots,a_n)$$

(corolario 8.3). Veamos la otra.

Sea $\lambda = (\lambda_1,\dots\lambda_n) \in \sigma(a_1,\dots,a_n)$. Debemos ver que existe algún $z \in \mathbf{C}$ tal que $(\lambda_1,\dots\lambda_n,z) \in \sigma(a_1,\dots,a_{n+1})$. Supongamos, por el absurdo, que no existe tal $z$. Entonces será $(\lambda_1,\dots\lambda_n,z) \notin \sigma(a_1,\dots,a_{n+1})$ para todo $z \in \mathbf{C}$. Sea $\delta'(z) = \delta'(\lambda_1,\dots\lambda_n,z)$ el operador de borde del complejo de Koszul $E(X,a_1-\lambda_1,\dots,a_n-\lambda_n,a_{n+1}-z) = (E^{n+1}(X),\delta'(z))$. $\delta' : \mathbf{C} \to \mathcal{D}(E^{n+1}(X))$ es un complejo de cadena paramétrico analítico finito, polinomio de grado 1 en $z$ (obs 11.8). Este complejo es exacto para todo $z \in \mathbf{C}$ pues $(a_1-\lambda_1,\dots,a_n-\lambda_n,a_{n+1}-z)$ es no singular. Además, $\delta'$ es exacto en $\infty$. En efecto, por (15) y (7) será

$$\begin{aligned}
\delta'_p(z) \quad = \quad & \sum_{\varepsilon\in\mathcal{B}^n_p}\sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} Q_{\widehat{\varepsilon_i}}(a_{j_i}-\lambda_{j_i})P_\varepsilon \\
& + \sum_{\varepsilon\in\mathcal{B}^n_{p-1}}\sum_{i=1}^{p-1} (-1)^{i-1} Q_{\widehat{\varepsilon_i}\wedge e_{n+1}}(a_{j_i}-\lambda_{j_i})P_{\varepsilon\wedge e_{n+1}} \\
& + \sum_{\varepsilon\in\mathcal{B}^n_{p-1}} (-1)^n Q_\varepsilon(a_{n+1}-z)P_{\varepsilon\wedge e_{n+1}}
\end{aligned}$$

y por lo tanto,

$$\lim_{w \to 0} w\delta'_p(1/w) = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{B}^n_{p-1}} (-1)^{n+1} Q_\varepsilon P_{\varepsilon \wedge e_{n+1}}$$

este es exactamente el operador de borde del complejo de Koszul asociado a la $n$-upla $(0,\ldots,0,I)$, que es no singular (corolario 8.3). Luego $\delta'$ es exacto en $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ y satisface las hipótesis del lema 13.1.

Observemos ahora la construcción 8.1. Como hemos supuesto que $(a_1 - \lambda_1, \ldots, a_n - \lambda_n)$ es singular, el complejo de Koszul correspondiente $(E^n(X), \delta)$ no podrá ser exacto. Sin embargo, sea $\xi \in$ ker $\delta_p$. Entonces (con las mismas notaciones de 8.1) $\delta'_p(z)\mu_p\xi = \mu_{p-1}\delta_p\xi = 0$ para todo $z \in \mathbf{C}$ (10). Por el lema 13.1, existe $\eta \in E^{n+1}_{p+1}$ tal que

$$\delta'_{p+1}(z)\eta = \mu_p\xi \quad \forall z \in \mathbf{C}$$

Sea $[\nu_p\eta]$ la clase de $\nu_p\eta$ en $H^n_{p-1}(X, a_1 - \lambda_1, \ldots, a_n - \lambda_n)$. $\delta_*[\nu_p\eta] = [\xi]$ (ver observación 8.2), de manera que

$$(a_{n+1} - z)[\nu_p\eta] = [\xi] \quad \forall z \in \mathbf{C}$$

entonces

$$z[\nu_p\eta] = a_{n+1}[\nu_p\eta] - [\xi] \quad \forall z \in \mathbf{C}$$

y por lo tanto $[\nu_p\eta] = 0$, de donde resulta $[\xi] = 0$. Esto significa que $H^n_p(X, a_1 - \lambda_1, \ldots, a_n - \lambda_n) = 0$ para todo $p$, absurdo$\square$

## 14.5 Propiedad (invariancia)

Sea $q \in \mathcal{L}(X,Y)$ inversible. Sea $a = (a_1, \ldots, a_n)$ una n-upla de operadores en $\mathcal{L}(X)$ que conmutan entre sí, y sea $a' = (a'_1, \ldots, a'_n)$, $a'_i = qa_iq^{-1} \in \mathcal{L}(Y)$. Entonces $\sigma(a) = \sigma(a')$.

DEM

Sea $\lambda = (\lambda_1, \ldots \lambda_n) \in \mathbf{C}^n$. $q$ induce un isomorfismo entre complejos de Koszul $\bar{q}: E(X, a-\lambda) \to E(Y, a'-\lambda)$ por $\bar{q}_p(x \otimes e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p}) = qx \otimes e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p}$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\bar{q}_{p-1}\delta_p(x \otimes \varepsilon) &= \sum(-1)^{i-1}q(a_{j_i} - \lambda_{j_i})x \otimes \widehat{\varepsilon_{j_i}} \\
&= \sum(-1)^{i-1}(qa_{j_i} - q\lambda_{j_i})q^{-1}qx \otimes \widehat{\varepsilon_{j_i}} \\
&= \sum(-1)^{i-1}(a'_{j_i} - \lambda_{j_i})qx \otimes \widehat{\varepsilon_{j_i}} \\
&= \delta'_p\bar{q}_p(x \otimes \varepsilon)
\end{aligned}$$

(donde $\delta$ y $\delta'$ son las diferenciales de $E(X, a-\lambda)$ y $E(X, a'-\lambda)$ respectivamente) y la sucesión

$$0 \longrightarrow E_p^n(X) \xrightarrow{\bar{q}_p} E_p^n(Y) \longrightarrow 0$$

es obviamente exacta para cada $p$. Aplicando el lema 5.1 a la sucesión exacta $0 \to E(X, a-\lambda) \to E(Y, a'-\lambda) \to 0 \to 0$ se obtiene

$$0 \longrightarrow H_p(X, a-\lambda) \xrightarrow{q_*} H_p(Y, a'-\lambda) \longrightarrow 0$$

de manera que $H_p(X, a-\lambda)$ es isomorfo a $H_p(Y, a'-\lambda)$ para cada $p\Box$

## 14.6 Teorema (Permutación de índices)

Sea $\tau : \{1,\dots,k\} \to \{1,\dots n\}$ inyectiva $(k \leq n)$. Si $a = (a_1,\dots,a_n)$ es una n-upla de operadores en $\mathcal{L}(X)$ que conmutan entre sí, sea $\tau^*(a) = (a_{\tau(1)},\dots a_{\tau(k)})$ y $\tau(\lambda) = (\lambda_{\tau(1)},\dots \lambda_{\tau(k)})$ para $\lambda \in \mathbf{C}^n$. Entonces

$$\sigma(\tau^* a) = \tau^* \sigma(a)$$

DEM

1. Si $k = n$, $\tau$ es una permutación de índices, que induce un isomorfismo entre los complejos de Koszul $E(X, a-\lambda)$ y $E(X, \tau^* a - \tau^* \lambda)$, definido por $\overline{\tau}_p(x \otimes e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_p}) = x \otimes e_{\tau^{-1}(j_1)} \wedge \dots \wedge e_{\tau^{-1}(j_p)}$. Es obvio que $\overline{\tau}_p : E_p^n(X) \to E_p^n(X)$ es un isomorfismo, y podremos aplicar la misma idea que en en la demostración de la propiedad 14.5 si demostramos que $\overline{\tau}$ conmuta con las diferenciales.

$$\begin{aligned}
&\overline{\tau}_{p-1}\delta_p(x \otimes e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_p}) \\
&\quad = \sum (-1)^{i-1}(a_{j_i} - \lambda_{j_i})\overline{\tau}_p(x \otimes e_{j_1} \wedge \dots \widehat{e_{j_i}} \dots \wedge e_{j_p}) \\
&\quad = \sum (-1)^{i-1}(a_{\tau\tau^{-1}(j_i)} - \lambda_{\tau\tau^{-1}(j_i)})(x \otimes e_{\tau^{-1}(j_1)} \wedge \dots e_{\widehat{\tau^{-1}(j_i)}} \dots \wedge e_{\tau^{-1}(j_p)}) \\
&\quad = \delta'_p(x \otimes e_{\tau^{-1}(j_1)} \wedge \dots e_{\widehat{\tau^{-1}(j_i)}} \dots \wedge e_{\tau^{-1}(j_p)}) \\
&\quad = \delta'_p \overline{\tau}_p(x \otimes e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_p})
\end{aligned}$$

2. En el caso en que $\tau(i) = i, \quad 1 \leq i \leq k$, $\tau^*$ es simplemente la proyección sobre las primeras $k$ coordenadas, y estamos en el caso del teorema 14.4

3. El caso general es consecuencia de (a) y (b)$\square$

### 14.7 Corolario (Espectro no vacío)

Si $X$ es un espacio de Banach no vacío, $\sigma(a) \neq \emptyset$ para cualquier n-upla de operadores $a$ que conmutan entre sí.

DEM

Sabemos (por ejemplo de [Kreyszig], teorema 7.5-4) que $\sigma(a_1) \neq \emptyset$ por ser de un operador acotado de un espacio de Banach. Aplicando el lema anterior, la proyección de $\sigma(a_1, \ldots, a_n)$ sobre la primera coordenada es $\sigma(a_1)$, no es vacío.

## 15 Transformada de Gelfand

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa. Notaremos con $\Delta(\mathcal{A})$ al conjunto de los ideales maximales de $\mathcal{A}$, llamado también *espectro* de $\mathcal{A}$. Sea $\mathcal{M} \in \Delta(\mathcal{A})$. El cociente $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ es un cuerpo isomorfo a $\mathbf{C}$ ([Mujica], Teorema 29.6), de manera que la proyección $\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{M}$ se identifica con una función lineal multiplicativa continua de $\mathcal{A}$ en $\mathbf{C}$. Inversamente, toda funcional lineal multiplicativa $\varphi : \mathcal{A} \to \mathbf{C}$ tiene como núcleo a un ideal maximal. Se obtiene una identificación entre ideales maximales y funcionales lineales multiplicativas continuas (ver [Mujica], Teorema 30.3). Esto permite definir la *transformada de Gelfand* $\wedge : \mathcal{A} \to \{\Phi : \Delta(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}\}$ por

$$\hat{a}(\varphi) = \varphi(a)$$

para toda $a \in \mathcal{A}$, $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$. Utilizaremos en adelante las letras $\mathcal{M}$ y $\varphi$ para referirnos a los elementos de $\Delta(\mathcal{A})$ vistos como ideales maximales o funcionales multiplicativas, respectivamente.

Dotando al conjunto $\Delta(\mathcal{A})$ de la topología que en él induce la topología débil-* del espacio dual $\mathcal{A}^*$, que coincide con la mínima que hace continuas a todas las $\hat{a}$, se obtiene ([Mujica], Teorema 30.6):

- $\hat{a}$ es continua para toda $a \in \mathcal{A}$
- $\Delta(\mathcal{A})$ es compacto
- $\|\hat{a}\| = r_\sigma(a)$

Sea $a = (a_1, \dots, a_n)$ una n-upla de elementos de $\mathcal{A}$. Definimos su transformada de Gelfand conjunta $\hat{a} : \Delta(\mathcal{A}) \to \mathbf{C}^n$ por $\hat{a}(\mathcal{M}) = (\hat{a}_1(\mathcal{M}), \dots, \hat{a}_n(\mathcal{M}))$.

## 15.1 Lema

Sea $a \in \mathcal{A}^n$ y sea $\langle a \rangle$ el ideal generado por $a$ en $\mathcal{A}$,

$$\langle a \rangle = \{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n, \quad b_i \in \mathcal{A}\}$$

Entonces

1. $\langle a \rangle \neq \mathcal{A}$ si y sólo si $0 \in \hat{a}(\Delta(\mathcal{A}))$
2. $\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \hat{a}(\Delta(\mathcal{A}))$

DEM

1. Supongamos que $\langle a \rangle \neq \mathcal{A}$. Entonces existe un ideal maximal $\mathcal{M} \supset \langle a \rangle \supset \{a_1, \dots, a_n\}$. $\hat{a}_i(\mathcal{M}) = 0$ pues $a_i \in \mathcal{M}$ para cada $i$, luego $\hat{a}(\mathcal{M}) = (0, \dots, 0)$.

   Inversamente, si $\mathcal{M}$ es tal que $\hat{a}(\mathcal{M}) = 0$, será $a_i \in \mathcal{M}$ para cada $i$, luego $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathcal{M}$ y por lo tanto $\langle a \rangle \subset \mathcal{M} \neq \mathcal{A}$.

2. $\lambda \in \sigma_{\mathcal{A}}(a)$ si y sólo si $\langle a-\lambda\rangle \neq \mathcal{A}$ (ecuación (1)); por el punto anterior esto sucede si y sólo si $0 \in \widehat{a-\lambda}(\Delta(\mathcal{A}))$, si y sólo si existe $\varphi \in \Delta(\mathcal{A})$ tal que $\hat{a}(\varphi) = \lambda(\varphi) = \lambda \square$

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa. Sea $X$ un espacio de Banach, $\mathcal{A}$-módulo a izquierda. Diremos que $X$ es un $\mathcal{A}$-módulo de Banach. Este es el caso, por ejemplo, cuando $\mathcal{A}$ es una subálgebra conmutativa de $\mathcal{L}(X)$. Sea $a = (a_1, \ldots, a_n)$ una n-upla de elementos de $\mathcal{A}$. Tenemos dos definiciones para no singularidad de $a$: En sentido algebraico (respecto de $\mathcal{A}$), a es no singular cuando el ideal generado $\langle a\rangle$ es distinto de $\mathcal{A}$. En sentido de Taylor (respecto de $X$), $a$ es no singular cuando $E(X,a)$ es exacto. Sabemos (corolario 7.3) que la segunda definición es más débil que la primera: No singularidad en sentido algebraico implica no singularidad en sentido de Taylor.

## 15.2 Espectro de Taylor de un álgebra

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa. El espectro $\Delta(\mathcal{A})$ tiene la siguiente propiedad: Una n-upla $a \in \mathcal{A}^n$ es singular en $\mathcal{A}$ si y sólo si existe $\mathcal{M} \in \Delta(\mathcal{A})$ tal que $\hat{a}(\mathcal{M}) = 0$. Esta propiedad caracteriza al conjunto $\Delta(\mathcal{A})$. Dado un $\mathcal{A}$-módulo $X$ definiremos un espectro "Tayloriano" $\Delta(\mathcal{A},X)$ que cumpla esta propiedad para la no singularidad de Taylor de $a_1, \ldots, a_n$ respecto de $X$.

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa, y sea $X$ un $\mathcal{A}$-módulo de Banach. Sea $\mathcal{A}^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}^n$ el conjunto de todas las n-uplas de elementos de $\mathcal{A}$. Para cada $a \in \mathcal{A}^\infty$ sea $\sigma(a) = \sigma(a,X)$ su espectro de Taylor, y sea $\Delta_a = \Delta_a(\mathcal{A},X) = \hat{a}^{-1}(\sigma(a))$ el conjunto de los ideales maximales cuya imagen por $\hat{a}$ cae en el espectro de Taylor. Como ya sabemos, $\sigma(a) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(a) = \hat{a}(\Delta(\mathcal{A}))$. Sea $\Delta(\mathcal{A}, X) = \bigcap_a \Delta_a(\mathcal{A}, X)$ (donde la intersección se toma sobre todas las $a \in \mathcal{A}^\infty$). Este será el espectro de Taylor del álgebra $\mathcal{A}$ respecto de $X$.

## 15.3 Lema

Sean $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathcal{A}^\infty$. Entonces

$$\sigma(a) \subset \hat{a}(\Delta_b(\mathcal{A}, X))$$

DEM

Sea $c = (a, b) = (a_1, \ldots, a_n, b_1, ..., b_m)$. Sea $z \in \sigma(a)$. Debido a la propiedad de la proyección (teorema 14.6), existe $w = (w_1, \ldots w_n)$ tal que $(z, w) \in \sigma(c)$. También, dado que el espectro de Taylor es un subconjunto del espectro algebraico (corolario 7.3), $(z, w) \in \sigma_{\mathcal{A}}(c)$ y por el corolario 15.1 será $(z, w) = \hat{c}(\mathcal{M})$ para algún ideal maximal $\mathcal{M} \in \Delta(\mathcal{A})$. En particular, $\hat{b}(\mathcal{M}) = (\hat{b}_1(\mathcal{M}), \ldots, \hat{b}_n(\mathcal{M})) = w \in \sigma(b)$, pues $\sigma(b) = \pi_2(\sigma(c))$ (donde $\pi_2(z, w) = w$ para $z \in \mathbf{C}^n$, $w \in \mathbf{C}^m$). Luego $\mathcal{M} \in \Delta_b$. También será $\hat{a}(\mathcal{M}) = (\hat{a}_1(\mathcal{M}), \ldots, \hat{a}_n(\mathcal{M})) = z$, luego $z \in \hat{a}(\Delta_b)$.

## 15.4 Lema

Sea $a = (a_1, \ldots, a_n)$ una n-upla de elementos de $\mathcal{A}$. Entonces

$$\sigma(a) = \hat{a}(\Delta(\mathcal{A}, X))$$

DEM

1. Por el lema anterior es $\sigma(a) \subset \hat{a}(\Delta_b)$ para todo $b \in \mathcal{A}^\infty$, luego

$$\sigma(a) \subset \bigcap_{b \in \mathcal{A}^\infty} \hat{a}(\Delta_b)$$

2. Dadas $b_1, \ldots, b_N \in \mathcal{A}^\infty$ existe $b \in \mathcal{A}^\infty$ tal que $\Delta_b \subset \bigcap_{i=1}^{N} \Delta_{b_i}$. En efecto, sea $b = (b_1, \ldots b_N)$ la concatenación de $b_1, \ldots b_N$. Por definición es $\Delta_b = \hat{b}^{-1}(\sigma(b))$. Sea $\mathcal{M} \in \Delta_b$. $\hat{b}(\mathcal{M}) \in \sigma(b) \Rightarrow \hat{b}_i(\mathcal{M}) = \widehat{\pi_i(b)}(\mathcal{M}) = \pi_i(\hat{b}(\mathcal{M})) \in \sigma(b_i)$, luego $\mathcal{M} \in \Delta_{b_i}$ (Donde $b_i \in \mathcal{A}^{m_i}$ y $\pi_i : \mathbf{C}^{m_1+\cdots+m_N} \to \mathbf{C}^{m_i}$ es la proyección que hace $\pi(b) = b_i$).

3. Sea $z \in \sigma(a)$. Sea $\Delta_z = \hat{a}^{-1}(\{z\})$. $\Delta_z$ es compacto. En efecto, $\{z\}$ es cerrado, luego también lo es $\Delta_z$; como $\Delta(\mathcal{A})$ es compacto, $\Delta_z$ resulta compacto. De igual manera será $\Delta_b = \hat{b}^{-1}(\sigma(b))$ compacto para $b \in \mathcal{A}^\infty$. Sea $\mathcal{F} = \{\Delta_z\} \cup \{\Delta_b : b \in \mathcal{A}^\infty\} \subset \Delta(\mathcal{A})$. $\mathcal{F}$ es una familia de compactos con la propiedad de intersección finita no vacía, ya que $\Delta_z \cap \bigcap_{i=1}^{N} b_i \supset \Delta_z \cap \Delta_b$ para algún $b \in \mathcal{A}^\infty$, y $\Delta_z \cap \Delta_b \neq \emptyset$, dado que $z \in \sigma(a)$ y $\hat{a}(\Delta_b) \supset \sigma(a)$. Existe entonces algún $\mathcal{M} \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$, y será $z = \hat{a}(\mathcal{M}) \in \hat{a}(\bigcap_{b \in \mathcal{A}^\infty} \Delta_b) = \hat{a}(\Delta(\mathcal{A}, X))\square$

## 15.5 Teorema

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa, $X$ un $\mathcal{A}$-módulo de Banach. Existe un conjunto $\Delta(\mathcal{A}, X) \subset \Delta(\mathcal{A})$ único con respecto a la siguiente propiedad:

‡ Si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ es una n-upla de elementos de $\mathcal{A}$, entonces $a$ es no singular en $X$ si y sólo si no existe $\mathcal{M} \in \Delta(\mathcal{A}, X)$ tal que $\hat{a}_1(\mathcal{M}) = \cdots = \hat{a}_n(\mathcal{M}) = 0$.

DEM

$\Delta(\mathcal{A},X)$ es compacto pues es intersección de cerrardos en un compacto. Del lema 15.4 sabemos que no es vacío y que $0 \in \sigma(a)$ si y sólo si $0 \in \hat{a}(\Delta(\mathcal{A},X))$. Veamos la unicidad.

Sean $D, D' \subset \Delta(\mathcal{A})$ que cumplen ‡. Sea $\mathcal{M} \in D$. Si vemos que $\mathcal{M} \in D'$ resultará $D \subset D'$; invirtiendo los papeles, $D' \subset D$.

Sean $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{M}$. Si $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $a$ es singular, pues $\hat{a}(\mathcal{M}) = 0$. Luego existirá algún $\mathcal{M}_a \in D'$ tal que $\hat{a}(\mathcal{M}_a) = 0$, o lo que es lo mismo, $a_i \in \mathcal{M}_a \; \forall i$. Sea $D'_a = D' \cap \hat{a}^{-1}(\{0\})$. $D'_a$ es compacto, pues $D'$ es compacto y $\{0\}$ es cerrado. Dados $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{M}$, $\hat{a}_i(\mathcal{M}_a) = 0 \; \forall i$, luego $\mathcal{M}_a \in \bigcap_{i=1}^{n} D'_{a_i}$. $\left\{D'_a,\, a \in \mathcal{M}\right\}$ es entonces una familia de compactos con la propiedad de intersección finita no vacía. Sea $\mathcal{M}' \in \bigcap_{a \in \mathcal{M}} D'_a$. $a \in \mathcal{M}' \Rightarrow \hat{a}(\mathcal{M}) = 0 \Rightarrow a \in \mathcal{M}$. Luego $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ y por la maximalidad $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ y $\mathcal{M} \in D'$ $\Box$

## 15.6 Lema

Sea $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ una sucesión exacta de $\mathcal{A}$-módulos, donde $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach conmutativa y $X$, $Y$, $Z$ espacios de Banach. Entonces cualquiera de los conjuntos $\Delta(\mathcal{A},X)$, $\Delta(\mathcal{A},Y)$, $\Delta(\mathcal{A},Z)$ estará contenido en la unión de los otros dos.

DEM

Sea $\mathcal{M} \in \Delta(\mathcal{A},X)$. Sea $D = \Delta(\mathcal{A},Y) \cup \Delta(\mathcal{A},Z)$. D es compacto en $\Delta(\mathcal{A})$. Sea $a = (a_1, \ldots, a_n)$ una $n$-upla de elementos de $\mathcal{M}$. $\hat{a}(\mathcal{M}) = 0$, luego $a$ es singular en $X$. Por el corolario 7.5 será $a$ singular en alguno de los espacios $Y$, $Z$. Por lo tanto, existirá algún $\mathcal{M}' \in D$ tal que $a \in \mathcal{M}'$. Procediendo de la misma forma en que se demostró la unicidad en el teorema 15.5, la familia de compactos $\left\{D_a :\; a \in \mathcal{M}\right\}$, $D_a = \left\{\mathcal{M}' \in \mathcal{A} : a \in \mathcal{M}'\right\}$ tiene intersección no vacía. Esto significa que $\mathcal{M} \in D$.

La cuenta para el caso $\mathcal{M} \in \Delta(\mathcal{A}, Y)$ o $\mathcal{M} \in \Delta(\mathcal{A}, Z)$ es la misma.

## 15.7 Algebra de Banach C(K)

Sea $K$ un compacto de $\mathbf{C}$. El conjunto $C(K)$ de funciones continuas de $K$ en $\mathbf{C}$ es un álgebra de Banach con las operaciones inducidas por $\mathbf{C}$, respecto de la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{z \in K} |f(z)|$$

(la completitud se debe a que el límite uniforme de funciones continuas es continuo).

El espectro de un álgebra de este tipo, $\Delta(C(K))$, es homeomorfo a $K$.

DEM

1. Sea $z \in K$. Sea $\mathcal{M}_z = \{f \in C(K) : f(z) = 0\}$. $\mathcal{M}_z$ es un ideal maximal: En efecto, es claro que $\mathcal{M}_z$ es un ideal cerrado. Sea $f \in C(K) \setminus \mathcal{M}_z$. Sea $g \in C(K)$. Se puede escribir $g = g_1 + g_2$, donde

$$\begin{aligned} g_1(w) &= f(w)\frac{g(z)}{f(z)} \\ g_2(w) &= g(w) - g_1(w) \end{aligned}$$

   Es claro que $g_2 \in \mathcal{M}_z$ y $g_1$ es un múltiplo escalar de $f$. $\mathcal{M}_z$ resulta ser maximal.

2. Sea $\mathcal{M} \in \Delta(C(K))$ un ideal maximal. Entonces $\mathcal{M} = \mathcal{M}_z$ para algún $z \in K$: Supongamos, por el absurdo, que no es así. Existirá entonces, para cada $z \in K$, una $f_z \in \mathcal{M}_z$ tal que $f_z(z) \neq 0$. Por continuidad, para cada $z \in K$ existe un abierto $V_z$ tal que $x \in V_z$ y $f_z$ no se anula en $V_z$. Sea $V_1, \ldots, V_n$

un subcubrimiento finito de $\{V_z,\, z \in K\}$. Sea $f = \sum_{i=1}^{n} f_i \overline{f_i}$. Entonces $f \in \mathcal{M}$ y $f(z) > 0\ \forall z \in K$. Por último, $f \cdot \frac{1}{f} = 1 \in \mathcal{M}$, lo cual es absurdo, pues suponíamos que $\mathcal{M}$ era un ideal maximal.

3. Sea $\mathcal{M}_z \in \Delta$, $f \in C(K)$. $\hat{f}(\mathcal{M}_z) = f(z)$: En efecto, $f - f(z)$ se anula en $z$, luego $f + \mathcal{M}_z = f(z) + \mathcal{M}_z$. La clase de $f$ en $\mathcal{M}/\mathcal{M}_z$ es la de $f(z)$.

4. $x \mapsto \mathcal{M}_z$ es continua: La topología en $\Delta(C(K))$ es la menor que hace continua a toda $\hat{f}$, $f \in C(K)$. Pero $\hat{f}(\mathcal{M}_z) = f(z)$, luego $x \mapsto f(\mathcal{M}_z)$ es continua para cualquier $f$.

5. $\mathcal{M}_z \mapsto z$ es continua: Sea $i \in C(K)$ definida por $i(z) = z$. Entonces $\hat{i}(\mathcal{M}_z) = i(z) = z$, luego $\hat{i}$ es la inversa de $x \mapsto \mathcal{M}_x$, y es continua.

## 15.8 Ejemplo

Este ejemplo demuestra que el conjunto $\Delta(\mathcal{A}, X)$ no depende de $\mathcal{A}$ únicamente, sino de la acción de $\mathcal{A}$ sobre $X$.

Sea $D = \{|z| \leq 1\} \subset \mathbf{C}$. Sea $\mathcal{A} = C(D) \cap \mathbf{A}(D^o)$. $\mathcal{A}$ es el álgebra de las funciones holomorfas en el disco unitario, continuas hasta el borde. $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach conmutativa dado que el límite uniforme de funciones analíticas es analítico. Probaremos que el espectro $\Delta(\mathcal{A})$ es homeomorfo a $D$. Por un lado, puesto que $\mathcal{A}$ es una subálgebra de $C(D)$, será $\Delta(\mathcal{A}) \supset \Delta(C(D)) \cong D$. Por el otro, dada $\varphi$ lineal, continua y multiplicativa, sea $\lambda = \hat{i}(\varphi)$ ($i = z \mapsto z$ es analítica). Entonces $\lambda$ determina a $\varphi$, pues si $f \in \mathcal{A}$ será $f = \sum a_n z^n$, convergente en $D^o$ y continua hasta $\partial D$. Entonces deberá ser $\varphi f = \sum a_n \varphi(z^n) = \sum a_n \lambda^n$.

Sea $X$ el espacio de Banach $C(\partial D)$, y consideremos la acción de $\mathcal{A}$ sobre $X$.

El espectro de Taylor $\Delta(\mathcal{A},X)$, es isomorfo a $\partial D$. En efecto, por la observación 15.10, $\Delta(\mathcal{B}) = \Delta(\mathcal{B},\mathcal{B})$. Hay un morfismo inyectivo $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ definido por la restricción a $\partial D$. Por el teorema 15.9 será $\Delta(\mathcal{A},X) = \Phi^*(\Delta(\mathcal{B},X)) = \Phi^*(\Delta(\mathcal{B}))\Box$

Sea $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfismo de álgebras de Banach conmutativas. Todo $\mathcal{B}$-módulo $X$ puede considerarse también como un $\mathcal{A}$-módulo, definiendo $ax = \Phi(a)x$ para $a \in \mathcal{A}$, $x \in X$.

Sea $\varphi \in \Delta(\mathcal{B})$. $\varphi \circ \Phi : \mathcal{A} \to \mathbf{C}$ es lineal y multiplicativa. $\Phi$ induce de esta manera una aplicación $\Phi^* : \Delta(\mathcal{B}) \to \Delta(\mathcal{A})$.

## 15.9 Teorema

Sea $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfismo de álgebras de Banach conmutativas. Si $X$ es un $\mathcal{B}$-módulo de Banach, será

$$\Delta(\mathcal{A},X) = \Phi^*(\Delta(\mathcal{B},X))$$

DEM

Por la unicidad en el lema 15.5, debemos ver que $\Phi^*(\Delta(\mathcal{B},X))$ satisface la propiedad ‡. Sea $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathcal{A}^n$. $a$ es no singular en $X$ si y sólo si $(\Phi(a_1),\ldots,\Phi(a_n))$ es no singular en $X$, pues de hecho hemos definido la acción de $\mathcal{A}$ en $X$ a partir de $\Phi$: $E(X,a)$ es $E(X,\Phi(a))$.

Por el teorema 15.5, $(\Phi(a_1),\ldots,\Phi(a_n))$ es singular si y sólo si existe $\varphi \in \Delta(\mathcal{B},X)$ tal que $\varphi(\Phi(a_i)) = 0$ para todo $i$. A su vez esto sucede si y sólo si existe $\varphi \circ \Phi \in \Phi^*(\Delta(\mathcal{B},X))$ tal que $\varphi \circ \Phi(a_i) = 0$ para todo $i\Box$

## 15.10 Observación

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa. $\mathcal{A}$ es en particular un espacio de Banach, $\mathcal{A}$-módulo a izquierda. Si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ es una n-upla de elementos de $\mathcal{A}$, sabemos por el lema 7.1 que $\langle a \rangle = \mathcal{A}$ implica que $E(\mathcal{A}, a)$ es exacto. Sin embargo en este caso es válida también la recíproca. En efecto, si $E(\mathcal{A}, a)$ es exacto, será en particular

$$E_1(\mathcal{A},a) \xrightarrow{\delta_1} E_0(\mathcal{A},a) \longrightarrow 0$$

exacto; pero $E_0(\mathcal{A},a) = E_0^n(\mathcal{A}) \cong \mathcal{A}$, y $\delta_1(\sum_{i=1}^n x_i \otimes e_i) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$; la suryectividad de $\delta_1$ significa que en particular existen $b_1, \ldots, b_n$ tales que $a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = e$.

Encontramos así que $\sigma_{\mathcal{A}}(a) = \sigma(a, \mathcal{A})$ $\forall a$ y también $\Delta(\mathcal{A}) = \Delta(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ debido a la unicidad en 15.5 y a que $\Delta(\mathcal{A})$ cumple la propiedad ‡ respecto de la noción algebraica de singularidad (15.2).

## 15.11 Corolario

Sea $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un morfismo de álgebras de Banach conmutativas. Considerando a $\mathcal{B}$ como un $\mathcal{A}$-módulo por la acción de $\Phi$ resulta

$$\Delta(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \Phi^*(\Delta(\mathcal{B}))$$

DEM

Por la observación anterior es $\Delta(\mathcal{B}, \mathcal{B}) = \Delta(\mathcal{B})$. La igualdad se debe entonces a 15.9

## 15.12 Observación

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra de Banach conmutativa, $I$ un ideal cerrado de $\mathcal{A}$. La proyección $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/I$ será un morfismo de álgebras de Banach. $I$ es un $\mathcal{A}$-módulo de Banach por ser un ideal cerrado, de modo que $0 \to I \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}/I \to 0$ es una sucesión exacta de $\mathcal{A}$-módulos de Banach y (por 15.6)

$$\Delta(\mathcal{A},\mathcal{A}) \subset \Delta(\mathcal{A},I) \cup \Delta(\mathcal{A},\mathcal{A}/I)$$

Por 15.10 es $\Delta(\mathcal{A}) = \Delta(\mathcal{A},\mathcal{A})$, y por 15.11, $\Delta(\mathcal{A},\mathcal{A}/I) = \pi^*(\Delta(\mathcal{A}/I))$. Obtenemos

$$\Delta(\mathcal{A}) \backslash \pi^*(\Delta(\mathcal{A}/I)) \subset \Delta(\mathcal{A},\mathcal{A}/I)$$

$\pi^*(\Delta(\mathcal{A}/I)) = \left\{\pi^{-1}(\mathcal{M}), \mathcal{M} \in \Delta(\mathcal{A}/I)\right\} \subset \left\{\mathcal{M} : \mathcal{M} \supset I\right\}$. El conjunto de ideales maximales que contienen a $I$ se denomina cápsula de $I = \operatorname{cap} I$. Se deduce entonces

$$\Delta(\mathcal{A}) \backslash \operatorname{cap} I \subset \Delta(\mathcal{A},\mathcal{A}/I)$$

y puesto que $\Delta(\mathcal{A},\mathcal{A}/I)$ es cerrado y que $A \backslash B \subset \overline{A \backslash B} = \bar{A} \backslash B^o$ se llega a

$$\Delta(\mathcal{A}) \backslash (\operatorname{cap} I)^o \subset \Delta(\mathcal{A},\mathcal{A}/I) \Box$$

## 15.13 Lema (Anuladores y Adjuntos)

Recordamos las siguientes propiedades de los espacios de Banach: Sean $X$, $Y$ espacios de Banach, $a \in \mathcal{L}(X,Y)$. Sean $X^*$, $Y^*$ los espacios duales, $a^* \in \mathcal{L}(Y^*,X^*)$

el adjunto de $a$. Sean $S, S' \subset X$ y $T, T' \subset X^*$ subespacios. Se definen los anuladores a izquierda y a derecha:

$$S^o = \{\phi \in X^* : \phi x = 0 \quad \forall x \in S\}$$
$$^oT = \{x \in X : \phi x = 0 \quad \forall x \in T\}$$

Valen las siguientes propiedades:

1. $\|a\| = \|a^*\|$
2. $S^o$, $^oT$ son subespacios cerrados
3. $S \subset S' \Rightarrow S^o \supset (S')^o$; $T \subset T' \Rightarrow {}^oT \supset {}^oT'$
4. $^o(S^o) = \overline{S}, \quad ({}^oT)^o = \overline{T}$
5. $(\ker a)^o = \overline{\operatorname{Im} a^*}$; $^o(\ker a^*) = \overline{\operatorname{Im} a}$

DEM

1. Ver [Kreyszig], Teorema 4.5-2
2. Es obvio.
3. Si $\phi$ anula a $S'$ anula en particular a $S$.
4. Es obvio que $\overline{S} \subset {}^o(S^o)$, debido a que el segundo es cerrado. Por el teorema de Hahn-Banach, dado $x \notin \overline{S}$ existe $\phi \in X^*$ tal que $\phi x \neq 0$, $\phi(\overline{S}) = 0$. Luego si $x$ es anulado por toda $\phi$ que anule a $\overline{S}$, será $x \in \overline{S}$.
5. $a^*\phi x = \phi(ax) = 0$ si $x \in \ker a \ \Rightarrow \overline{\operatorname{Im} a^*} \subset (\ker a)^o$. Además, si $x \in {}^o\overline{\operatorname{Im} a^*}$ será $a^*\phi x = \phi a x = 0$ para toda $\phi$. Por Hahn-Banach, $ax = 0$, resultando $^o\overline{\operatorname{Im} a^*} \subset \ker a \square$

Sea $X$ un $\mathcal{A}$-módulo de Banach. Si $X^*$ es el espacio dual de $X$, $X^*$ es un $\mathcal{A}$-módulo definiendo $a\phi(x) = \phi(ax)$ para $a \in \mathcal{A}$, $x \in X$, $\phi \in X^*$.

## 15.14 Teorema

Si $X$ es un $\mathcal{A}$-módulo de Banach,

$$\Delta(\mathcal{A}, X) = \Delta(\mathcal{A}, X^*)$$

DEM

Sea $a = (a_1, \ldots, a_n)$ una n-upla de elementos de $\mathcal{A}$. Veremos que $a$ es no singular en $X$ si y sólo si lo es en $X^*$. La unicidad en 15.5 demuestra el teorema.

Sea $E(X,a) = (E^n(X), \delta)$ el complejo de Koszul de $a$ en $X$, y sea $E(X^*,a) = (E^n(X^*), \delta)$ el correspondiente en $X^*$. Sea $E^n_p(X)^*$ el dual de $E^n_p(X)$, $\delta^*_p : E^n_{p-1}(X)^* \to E^n_p(X)^*$ el operador adjunto de $\delta_p$ definido por $(\delta^*_p\phi)(\xi) = \phi(\delta_p(\xi))$ para $\xi \in E^n_p(X)$, $\phi \in E^n_{p-1}(X)^*$. Obtenemos un complejo "dual" $E(X,a)^*$:

$$0 \longrightarrow E^n_o(X)^* \xrightarrow{\delta^*_1} \cdots \xrightarrow{\delta^*_n} E^n_n(X)^* \longrightarrow 0$$

Este complejo es exacto si y sólo si $E(X,a)$ lo es, puesto que $(\ker\delta_{p+1})^o = \overline{\operatorname{Im}\delta^*_{p+1}}$ e $\overline{\operatorname{Im}\delta_{p+1}} = {}^o(\ker\delta^*_p)$, luego $\ker\delta_{p+1} = \operatorname{Im}\delta_p$ si y sólo si $\operatorname{Im}\delta^*_{p+1} = \ker\delta^*_p$. Por último, $E(X^*,a)$ y $E(X,a)^*$ son isomorfos. En efecto, $E^n_q(X)^*$ es canónicamente isomorfo a $E^n_q(X^*)$, y definiendo $\psi_p : E^n_p(X^*) \to E^n_{n-p}(X^*)$ por

$$\psi_p(\phi \otimes e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p}) = (-1)^{p+\Sigma j_i}\phi \otimes e_1 \wedge \ldots \hat{e}_{j_1} \ldots \hat{e}_{j_p} \ldots \wedge e_n$$

se obtiene un isomorfismo de complejos□

## 15.15 Ejemplo

En 3.2 hemos visto que si $a_1, \ldots, a_n$ es una n-upla de elementos de $\mathcal{L}(X)$ que conmutan entre sí y $\mathcal{A}$ es una subálgebra conmutativa que los contiene, será $(a) \subset \mathcal{A} \subset (a)'$, por lo tanto $\sigma(a) \subset \sigma_{(a)'}(a) \subset \sigma_{\mathcal{A}}(a)$. Veremos un ejemplo donde la inclusión $\sigma(a) \subset \sigma_{(a)'}(a)$ es estricta. Esto significa que la teoría espectral de Taylor no es reducible a la teoría algebraica para ninguna subálgebra conmutativa de $\mathcal{L}(X)$.

Sea $D = \bar{B}^2(0,1) = \{|z| \leq 1\}^2 \subset \mathbf{C}^2$. Sea $U = B^2(0,2) \supset D$. Sea $V = U \setminus D$. Sea $C^1(\bar{V})$ el espacio de funciones continuas que tienen derivadas parciales en $V$, continuas en $\bar{V}$. Para $f \in C^1(\bar{V})$ definimos la norma $\|f\|_1$ como la suma de los supremos de $f$ y sus derivadas de orden 1 en $\bar{V}$. Tanto $C(\bar{V})$ (con la norma supremo) como $C^1(\bar{V})$ son espacios de Banach (ver por ejemplo [Kreyszig], pág 110). Sea $X = C^1(\bar{V}) \oplus C(\bar{V})$. Definimos los siguientes operadores:

$$
\begin{aligned}
a_1(f,g) &= (z_1 f, z_1 g) \\
a_2(f,g) &= (z_2 f, z_2 g) \\
a_3(f,g) &= (0, \tfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_1}) \\
a_4(f,g) &= (0, \tfrac{\partial f}{\partial \bar{z}_2}) \\
a_5(f,g) &= (0, f)
\end{aligned}
$$

Se observa que $a_1, \ldots, a_5$ conmutan entre sí: $a_i a_j = 0$ si $i > 2,\ j > 2$. En los demás casos se ve fácilmente. Por ejemplo, $a_1 a_3(f,g) = (0, z_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1}) = a_3 a_1(f,g) = (0, \frac{\partial z_1 f}{\partial \bar{z}_1})$, puesto que $\frac{\partial z_1 f}{\partial \bar{z}_1} = z_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1} + f \frac{\partial z_1}{\partial \bar{z}_1} = z_1 \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1}$. Para ver la continuidad de

$a_1,\ldots,a_5$ bastará observar que $\sup|z_1 f| \leq 2\sup|f|$, y $\sup\left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1}\right| \leq \frac{1}{2}\left(\sup\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| + \sup\left|\frac{\partial f}{\partial y_1}\right|\right)$. $(a_1,\ldots,a_5)$ es una 5-upla conmutativa en $\mathcal{L}(X)$.

## 15.16 Teorema

La 5-upla $a = (a_1,\ldots,a_5)$ que se acaba de definir es no singular en $X$, pero la ecuación

$$a_1 b_1 + \cdots a_5 b_5 = I$$

no tiene solución para $b_1,\ldots b_5 \in (a)'$.

DEM

1. Sea $h \in C^1(\bar{V})$. $h$ se identifica con un operador de $\mathcal{L}(X)$ por $h(fg) = (hf, hg)$. En efecto, $\sup|hf| \leq \sup|h|\sup|f|$, y $\sup\left|\frac{\partial hf}{\partial x_i}\right| \leq \sup|f|\sup\left|\frac{\partial h}{\partial x_i}\right| + \sup|h|\sup\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|$. $C^1(\bar{V})$ se identifica así con una subálgebra conmutativa $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}(X)$. Tanto $a_1$ como $a_2$ pertenecen a $\mathcal{B}$.

2. $(a_1, a_2)$ es no singular en $X$. En efecto, definiendo

$$b_1(f,g) = \left(\tfrac{1}{2z_1} f, \tfrac{1}{2z_1} g\right)$$
$$b_2(f,g) = \left(\tfrac{1}{2z_2 f}, \tfrac{1}{2z_2} g\right)$$

   será $a_1 b_1 + a_2 b_2(f,g) = (f,g)$. Luego $a_1 b_1 + a_2 b_2 = I$ en $\mathcal{B}$ y, por el corolario 7.2, $(a_1, a_2)$ es no singular respecto de $X$. Por lo tanto (Corolario 8.3) también $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$.

3. Sea

$$X_0 = \{(0,g),\ g \in C(\bar{V})\}$$

$$X_1 = \{(f,g) \in X : \ f \in \mathbf{A}(V)\}$$

Ambos son subespacios cerrados invariantes para $a_1, \dots a_5$. $X_1 = \ker a_3 \cap \ker a_4$, pues las funciones analíticas (holomorfas) en $V$ son exactamente aquellas que cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_2} = 0$. También, $X_0$ es el núcleo de $a_5$.

Sea $b \in (a)'$. Entonces $X_0, X_1$ son invariantes por b. En efecto, si $c \in \mathcal{L}(X)$ y $bc = cb$, será $\ker c$ invariante por $b$: Para $k \in \ker c$ es $c(bk) = bck = b0 = 0$, luego $bk \in \ker c$. Entonces $X_0$ es invariante por $b$ por ser $X_0 = \ker a_5$, y $X_1$ por ser intersección de dos subespacios invariantes por $b$ ($\ker a_3$ y $\ker a_4$).

Consideremos ahora $X_0$, $X_1 y X_1/X_0$ como $(a)'$-módulos a izquierda. $X_1/X_0$ es igual al espacio de funciones analíticas en $V$, continuas en $\bar{V}$. Tales funciones admiten extensiones analíticas a todo $U$ (ver [G-R], I.C.5). $a_3$, $a_4$ y $a_5$ son nulos en $X_1/X_0$: $\ker a_3$, $\ker a_4$ contienen a $X$ e $\operatorname{Im} a_5 \subset X_0$. Luego, si fuera $a_1b_1 + \cdots + a_5b_5 = I$ debería ser $a_1b_1 + a_2b_2 = I$ en $X_1/X_0$. También, si dos funciones analíticas en $U$ coinciden en $V$, coincidirán en todo $U$. Esto nos permite identificar $X_1/X_0$ con el conjunto de funciones analíticas en $U$, continuas en $\bar{U}$. Si existieran $b_1$, $b_2$ tales que $a_1b_1 + a_2b_2 = I$, sea $f(z_1,z_2) = 1$. $(a_1b_1 + a_2b_2)f(0,0) = f(0,0) = 1$, pero $z_1(b_1f)(0,0) + z_2(b_2f)(0,0) = 0 \neq 1$. Luego no existen tales $b_1$, $b_2$ y $a_1, \dots, a_5$ es singular respecto de $(a)'\square$

# BIBLIOGRAFÍA

**[Arens]** R. Arens: The analytic-functional calculus in commutative topological algebras, *Pacific Journal of Mathematics 11*, 1961.

**[A-C]** R. Arens, A. Calderón: Analytic functions of several Banach algebra elements, *Annals of Mathemathics 62*, 1965.

**[B-G]** Carlos A. Berenstein, Roger Gay: *Complex Variables: an introduction.* Springer-Verlag, 1991.

**[Curto]** Raúl E. Curto: Applications of Several Complex Variables to Multiparameter Spectral Theory, *Surveys of some recent results in operator theory*. Longman, 1988.

**[G-R]** R.C. Gunning, H. Rossi: *Analytic Functions of Several Complex Variables*. Prentice-Hall, 1965.

**[Gleason]** Andrew M. Gleason: Finitely Generated Ideals in Banach Algebras, *Journal of Mathematics and Mechanics 13*, 1964.

**[Kelley]** John L. Kelley: *Topología General*. Eudeba, 1962.

**[Krantz]** Steven G. Krantz: *Function theory of several complex variables, second edition*. Wadsworth & Brooks/Cole, 1992.

**[Kreyszig]** Erwin Kreyszig: *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, 1978.

**[Lang]** Serge Lang: *Algebra.* Aguilar, 1971.

**[Mujica]** Jorge Mujica: *Complex Analysis in Banach Spaces*. North-Holland, 1986.

**[R-S]** Michael Reed, Barry Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*. Academic Press, 1972.

**[Taylor]** Joseph L. Taylor: A Joint Spectrum for Several Commuting Operators, *Journal of Functional Analysis 6*, 1970.

**[Taylor2]** Joseph L. Taylor: The analytic functional calculus for several commuting operators, *Acta Mathematica 125*, 1970.

**[Waelbroeck]** L. Waelbroeck: Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives, *Jornal des Matematiques Pures et Appliqués 33*, 1954.

**INDICE**